ELEMENTI

DI

FISICA UNIVERSALE.

ELEMENTI

DI

FISICA UNIVERSALE

DEL SACERDOTE ROMANO

FRANCESCO REGNANI

DOTTORE IN SACRA TEOLOGIA ED IN FILOSOFIA E MATEMATICA,
PROFESSORE DI FISICA UNIVERSALE NEL GINNASIO ROMANO DI FILOSOFIA,
DI FISICO-CHIMICA NEL LICEO DEL PONTIFICIO SEMINARIO ROMANO,
E DI FISICA SPERIMENTALE NEL PONTIFICIO COLLEGIO URBANO.

SECONDA EDIZIONE

MIGLIORATA, E NOTABILMENTE ACCRESCIUTA DALL'AUTORE.

PARTE TERZA.

ROMA.

NELLA STAMPERIA DELLE INCISIONI ZILOGRAFICHE.
21. Passeggiata di ripetta.

1863.

FISICA UNIVERSALE.

PARTE TERZA.

FISIOMETRIA.

INTRODUZIONE.

1. Utilità della Fisiometria e sue parti. — I. Non tutte le verità dell'ordine fisico esigono, ad essere ritrovate e dimostrate, la osservazione metodica dei casi particolari, od elaborate sperienze; ma ve n' à pur di quelle, che possono legittimamente germinare da una formula algebrica rappresentante un'ipotesi, la quale s'avveri in qualche fatto assai noto. Conciossiachè, usando allora dei diritti che ne concede la Matematica, possiamo fare che la formula medesima di trasformazione in trasformazione passando, riesca ad annunciare qualche importante legge fisica, o a proporre la spiegazione di fenomeni assai difficili. Dalla supposizione, a cagion d'esempio, di una forza costante e continua, la quale animi un punto materiale, possono trarsi assai agevolmente le leggi del moto uniformemente accelerato: e quindi che altro più si richiede per far trapasso da queste a quelle della caduta dei gravi nel vuoto? Forse qualche prolungata, e accigliata osservazione? Forse una serie ben condotta di artificiosi esperimenti? Nulla di tutto ciò. Non si à che a ricordare una cosa notissima a tutti, ed è che i solidi sono corpi pesanti, e che il peso rivela una forza, la quale opera continuamente, e sempre colla energia medesima: ed ecco di presente stabiliti i fondamenti della Dinamica. Ma anche allora, che l'indagine fisica esordisce da leggi osservate od esperimentate, la Matematica ne porge un' utilità preziosissima. Infatti traduci parimente nel linguaggio del calcolo

quel fatto costante, ed introducivi successivamente le varie modificazioni esprimenti i diversi casi, nei quali il fenomeno può venire in atto: e ne trarrai colla massima facilità de'corollarii, che sono le più eleganti spiegazioni di altrettanti fatti complicatissimi. Chi non ammirerà, esempigrazia, la speditezza e l'infallibilità, onde dalla legge dell'uguaglianza degli angoli, e della medesimezza dei piani d'incidenza e di riflessione si esce a dar ragione di tutte le apparenze spesso sorprendenti assai, che ne offrono gli specchi, vuoi piani o curvi, vuoi semplici o combinati?

II. Pertanto noi intendendo di servirci sì dell'una che dell'altra maniera di applicazione del calcolo ai fenomeni del Mondo corporeo, abbiam rimandato a questa Terza ed ultima Parte dell'opera tutti quei Trattati, che possono utilmente giovarsi di tali applicazioni; e però sogliono costituire quella, che altri chiamano Fisico-matematica, e noi *Fisiometria*. E sono la Meccanica divisa nella Statica e nella Dinamica sia de'solidi, sia de'liquidi, sia dei vapori; l'Acustica, e l'Ottica con una succinta esposizione del sistema delle ondulazioni; finalmente la Geografia matematica, e l'Astronomia fisica ristrette alla soluzione dei problemi più fondamentali. E questi esporremo in tre Sezioni distinte. Alle quali verrà appresso un' Appendice, contenente quelle teoriche di Matematica pura, che non sogliono insegnarsi nel primo anno di Filosofia, ma pure richieggonsi alla piena intelligenza delle dottrine esposte in questi Elementi. Ma innanzi tratto si noti bene, che non intendiamo proibirci in questa Parte le osservazioni e le sperienze: chè anzi, ove verranno opportune o a schiarimento o a conferma delle teorie matematiche ci faremo un obbligo di invocarle, e spiegarle. Il che potrà eziandio coadiuvarci talvolta nell'intendimento, che abbiamo, di usare dell'algorismo con quella parsimonia ed economia, onde vuole adoperarsi ogni cosa, la cui utilità risieda unicamente nell'esser mezzo ad un fine.

SEZIONE PRIMA.

MECCANICA.

NOZIONI PRELIMINARI.

2. Equilibrio, moto, e forze. — A ridurre, per quanto è possibile, ai minimi termini le difficoltà, che s'incontrano dai principianti nello studio della Meccanica, fa d'uopo prender le mosse dallo stabilire dei concetti chiari sull'equilibrio, sul moto, e sulle forze; dal distinguere accuratamente le varie specie di quello e di queste; e dall'annunciare le maniere più esatte per rappresentare e valutare queste forze medesime.

I. DEFINIZIONI. 1ª Si dice *equilibrio* la quiete risultante dall'azione di più forze, che si elidono completamente fra loro.

2ª Il traslocarsi di un punto materiale di un sito in un altro si appella *moto*.

3ª Se tutti i punti materiali di un dato corpo girano circolarmente intorno ad una retta passante per qualcuno di essi, tal moto si chiama *rotatorio*.

4ª Quella retta poi, sulla quale certamente si ritrovano i centri di tutti i circoli percorsi dai singoli punti materiali, viene denominata *asse di rotazione*.

5ª Ove poi il moto di un corpo sia tale, che non vi sia verun suo punto materiale il quale rimanga al posto suo, allora si chiama *traslatorio*.

6ª Se il moto rimane costante in direzione, si domanda *rettilineo*.

7ª Se no, vien detto *curvilineo*.

8ª Si denomina *moto uniforme*, quando ne è costante la velocità.

9ª Quando poi questa è incostante, il moto stesso à nome *moto vario*.

10ª Se il moto è vario, perchè la velocità viene successivamente aumentando, prende l'aggettivo di *accelerato*.

11ª Prende invece quello di *ritardato*, se la velocità viene diminuendo.

12ª Quando gli aumenti o le diminuzioni di velocità sono uguali in ciascuna successiva unità di tempo, il moto è detto *uniformemente* o accelerato o ritardato.

13ª Siccome il moto può essere prodotto da una o più forze; così nel primo caso suol chiamarsi *semplice*, e *composto* nel secondo.

14ª Due o più forze si chiamano *parallele*, se parallele sono fra loro le direzioni, nelle quali esse spingono i punti materiali sui quali operano.

15ª All' incontro sono appellate *oblique* o *ad angolo*, se tali direzioni sono in qualche maniera inclinate fra loro.

16ª Sono chiamate *cospiranti* più forze, se determinano il mobile a correre dalla medesima parte, per esempio se tutte lo spingono a destra, o tutte a sinistra.

17ª Sogliono invece denominarsi *opposte* o *inverse* due forze una delle quali spinge il mobile in un senso, esempigrazia in su, e l'altra in senso contrario, cioè in giù.

18ª Se poi il punto materiale in virtù di due forze dee scorrere per la stessa via, vale a dire per la stessa linea, allora o le forze sono anche cospiranti e son dette *perfettamente cospiranti*, o sono opposte, e si contraddistinguono appellandole *direttamente* o *diametralmente opposte*.

19ª Si considerano e chiamano *uguali* due forze, che sono capaci di produrre la stessa velocità sopra un punto materiale.

20ª Si domandano *istantanee* le forze, che agiscono sul mobile per un istante, ossia per un tempo inapprezzabile.

21ª Si dicono *continue*, se per un tempo valutabile insistono sul mobile.

22ª Esse stesse vengono denominate o *costanti*, o *variabili*, secondo che esercitano o no sul mobile sempre la medesima energia o intensità.

23ª Una forza che si spiega sopra un corpo, il quale sia impedito a muoversi, si denomina *forza morta*.

24ª Quella poi che produce l'effetto vien detta *forza viva*.

25ª La forza viva, specialmente nel caso che sia continua, prende nome di forza *motrice*.

26° Se la forza morta è continua, si domanda *pressione*.

27° La forza viva e continua, considerata come producente il moto nell'unità di massa e di tempo, si contraddistingue coll'appellazione di forza *acceleratrice*.

28° Il prodotto della massa, cui una forza abbia impresso un movimento, per la velocità di questo movimento medesimo, vien denominato *quantità di moto*.

II. Scolii. 1° Poichè la forza non può da noi caratterizzarsi e riconoscersi che dal suo effetto, e questo consiste nel costringere il punto materiale a scorrere per una certa direzione, e con una data velocità; così ogni forza suole essere rappresentata da una linea, la quale colla sua giacitura segni la via, per cui scorre il detto punto, e colla sua lunghezza mostri la distanza, a cui esso perviene in una unità di tempo. Per lo che una tal linea rappresenterà tanto la direzione della forza, quanto la sua intensità od energia.

2° Per l'unità di tempo sopraddetta suole assumersi il minuto secondo.

3° Il valore delle forze, che stimolano non un sol punto, ma un corpo intero, si desume dal loro effetto: il quale consiste nel comunicare una certa velocità ad una data massa.

4° L'effetto di una forza istantanea (I. 20°) e però la forza stessa, si fa uguale alla quantità di moto (I. 28°). E veramente una forza dee dirsi tanto più energica, quanto maggiore è la velocità che imprime ad una unità di massa, o ad un punto materiale, e quanto è maggiore la massa, o il numero dei punti materiali, ai quali essa comunica l'unità di velocità. E in linguaggio algebrico, chiamando f la forza, v la velocità, m la massa, può dirsi che

$$f = mv.$$

5° La velocità si valuta dallo spazio percorso dal mobile nell'unità di tempo; cosicchè quanto è maggiore questo spazio, tanto è maggiore anche la velocità. Anzi questa si rappresenta precisamente dal detto spazio.

6° La forza viva (I. 24°) suole [1] considerarsi come uguale al prodotto della massa pel quadrato della velocità.

1 Per evitare ogni briga sia coi *cartesiani*, che sostengono doversi

7° La intensità di una forza continua si stima dalla massa, a cui è impresso il moto, moltiplicata per l'aumento di velocità, che essa induce in una unità di tempo; ossia per la forza acceleratrice (I. 27ª) moltiplicata per la massa. Per esempio, la forza della gravità, che è certamente continua, ove sia chiamata φ, deve esprimersi per l'aumento di velocità prodotto da essa in ciascuna unità di tempo, aumento che suole esprimersi per g, moltiplicato per la massa, che diremo m. Insomma sarà

$$\varphi = gm.$$

8. Parallelogrammo delle forze. — È fondamentale in Meccanica lo studio dell'equilibrio e del moto di un punto materiale sollecitato da due forze istantanee. Da questo pertanto la esordiremo.

I. Postulati. 1° Un mobile, per l'impulso contemporaneo di una o più forze istantanee, dovrà scorrere per una linea retta, non mai per una curva. Chè il cangiamento di direzione (2. I. 7ª), per l'inerzia della materia, sarebbe un effetto senza causa.

2° Il moto prodotto da una forza istantanea non può essere che uniforme. Dacchè ogni accelerazione o ritardo mancherebbe parimente della propria cagione.

3° È evidente che, se due forze istantanee perfettamente cospiranti (2. I. 18ª) agiscono ad un tempo sopra un mobile, debbono produrre su questo un effetto uguale alla somma delle loro intensità; ossia fargli percorrere in una unità di tempo una retta, uguale alla somma delle due rette, che sarebbero successivamente percorse dal mobile stesso, se fosse stato sollecitato prima dall'una, poi dall'altra delle due forze medesime.

valutare anche le forze vive per la semplice quantità di moto, sia coi *leibniziani*, i quali pretendono dimostrare che le sole forze morte sono uguali al prodotto della massa per la semplice velocità che imprimerebbero se sortissero l'effetto, ma che invece le forze vive sono uguali al prodotto della massa pel quadrato della velocità, cui imprimono di fatto; mi limito a narrare in questo Scolio, che per convenzione quest'ultimo prodotto suol chiamarsi *forza viva*, o, in altri termini, suole usarsi a valutarla.

4° Che se le due forze sieno direttamente opposte (2. I. 18ª), ma disuguali, il mobile correrà nella direzione della maggiore; e nella unità di tempo compirà una retta uguale alla differenza delle due che avrebbe percorso separatamente, se fosse stato in due diversi tempi sollecitato prima dall' una, poi dall'altra delle dette forze.

5° È manifesto che, se ad un punto materiale vengono applicate due forze uguali (2. I. 19ª) e direttamente opposte, esso punto starà in equilibrio (2. I. 1ª).

6° Come per converso dovranno due forze ritenersi per uguali e direttamente opposte, se applicate ad un punto materiale produrranno in questo l'equilibrio.

7° Che se due forze non sieno uguali o direttamente opposte, il punto materiale, cui esse sono applicate, si muoverà.

8° E poichè il mobile non può procedere che in una sola direzione, e con una sola velocità; così esso in quest' ultimo caso si muoverà, come se fosse sollecitato da un'unica forza capace d'imprimere da sè sola quella velocità e direzione.

II. DEFINIZIONI. 1ª Quell'unica forza, capace d' imprimere ad un mobile la stessa direzione, che gli vien comunicata da due o più altre insieme, si denomina la *risultante* di queste.

2ª Queste medesime riguardo alla risultante si appellano *componenti*.

3ª Si dice *comporre le forze* il trovare la risultante delle date componenti.

4ª Si chiama *decomporre* o *risolvere* le forze il sostituire alla data risultante le sue componenti.

III. PROPOSIZIONE. *La risultante di due forze oblique, ed applicate ad un punto, è tale che può essere rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo, i cui due lati adiacenti ne rappresentino le componenti.*

Dichiarazione. Questo postulato può dichiararsi, ed esser reso accettevole col seguente discorso [1]. Poniamo che il punto

[1] È evidente che la direzione della risultante dipende dalla intensità relativa delle componenti: cosicchè la risultante di due forze uguali dividerà a metà l'angolo formato da loro; quella di due forze disuguali resterà dalla parte della maggiore, e tanto più quanto sono più disuguali. Il valore poi della risultante dee dipendere dall'angolo formato

materiale M (fig. 1.) sia determinato da una forza p a percorrere nell' unità di tempo la retta MP, e dalla forza q sia spinto a camminare nella stessa unità di tempo per tutta la MQ. Si compia il parallelogrammo MPRQ, conducendo la PR parallela ad MQ, e la RQ parallela ad MP, e si tracci la diagonale MR; diciamo che il mobile M, per l'azione simultanea delle due p e q, nel tempo stesso correrà per tutta la MR. A dimostrarlo Newton reca il seguente argomento. La forza p, agendo in una direzione parallela a QR, non può nè accostare nè scostare il mobile M da questa retta QR, sulla quale esso è spinto dalla q. Dunque M dopo l'unità di tempo perverrà sopra QR tanto se sia animato dalla sola q, quanto se lo sia da p e da q. Per la stessa ragione M perverrà nel tempo stesso sopra la PR tanto se sia animato dalla sola p, quanto se lo sia tutto ad un tempo e dalla p, e dalla q. Dunque allo spirare dell'unità di tempo perverrà sulla PR e sulla QR, vale a dire sul punto loro comune, dopo avere (I. 7°) percorsa la linea retta MR [1].

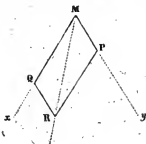



Fig. 1.

dalle due forze: cotalchè quanto questo è più acuto, tanto maggiore sarà la risultante; essendo allora le componenti meno divergenti fra loro, e tendendo così sempre meglio al caso del massimo favore (che è quello della perfetta cospirazione) nel quale la risultante è uguale alla somma delle componenti. Finalmente la risultante deve giacere nel piano delle componenti: altrimenti la deviazione da tal piano sarebbe un effetto senza causa.

1 Altri dichiarano la cosa nel seguente modo. Si principia dal chiedere a guisa di postulato, che traslocando una forza parallelamente a sè stessa, non se ne altera l'effetto: come una formica non è punto impedita di camminare al modo medesimo da un capo all'altro di una riga MQ (fig. 2.) perchè questa riga viene contemporaneamente traslocata parallelamente a sè stessa, ossia si fa passare prima in p'm', poi in p''m'',....., e finalmente in PR. Ciò premesso, s'intenda divisa la MP in tante porzioni uguali Mp', p'p'', p''p'''..., e la MQ in altrettante parimenti uguali fra loro Mn', n'n'',..., le quali (3. I. 1°, 2°) porzioni

IV. Corollarii. 1° I tre lati di qualsivoglia dei due triangoli MPR, MQR, che nascono dalla diagonale del parallelogrammo delle due forze, rappresentano le due componenti

rappresenteranno gli spazii, che sarebbero nelle stesse frazioni di tempo percorsi dal mobile o sulla MP, o sulla MQ, se questo avesse ricevuto l'impulso o dalla sola *p* o dalla sola *q*. Dunque il punto materiale M nel primo istante perverrebbe in n' per la sola *q*; ma giungerà invece in m', se frattanto la forza *p* si sia traslocata in p'm'; se nel secondo istante la *p* si porta in p''m'', M si troverà in m'', e così via dicendo, finchè la *p* giungendo sulla PR, il mobile perverrà in R. Ora si congiungano con tante linee rette i punti M, m', m'',...., R, e la linea che ne risulterà sarà la risultante cercata; ossia la linea percorsa dal mobile. Che poi questa sia la diagonale del parallelogrammo, si rileva dal dimostrare che questa linea medesima, la quale principia in M, e termina in R, è retta. Il che può farsi assai agevolmente. Abbiamo diviso in tante porzioni uguali la MP, ed in altrettante pure uguali fra loro la MQ; dunque Mn' : Mn'' :.... : MQ :: Mp' : Mp'' :.... : MP. E poichè Mp' = n'm'; Mp'' = n''m'';..; così Mn' : Mn'' :.... : MQ :: n'm' : n''m'' :... : QR. Ora sappiamo dalla Geometria, che ove due linee rette poste ad angolo sieno tagliate da tante parallele, queste sono proporzionali ai segmenti che ne nascono tanto nell'una che nell'altra. Dunque viceversa, ove quante si voglia linee parallele n'm', n''m'',... poggino un loro estremo sopra la stessa retta MQ e vadano a terminare sopra una seconda linea in guisa da riuscire proporzionali ai segmenti della detta retta, certamente questa seconda linea è retta e non curva: altrimenti qualcheduna di dette parallele sarebbe *disuguale* da quella, che partendo dal medesimo punto della retta (su cui tutte poggiano) terminasse ad un'altra, che fosse veramente retta, e ciò non ostante sarebbe *proporzionale* come quella ai detti segmenti: il che è assurdo. Dunque ecc.

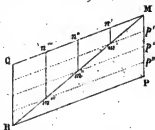



Fig. 2.

Cui non piacesse tale dimostrazione, potrebbe rivolgersi a quest'altra. Sieno MP ed MQ le due rette rappresentanti le forze *p* e *q* poste ad angolo retto fra loro. Senza conoscere la direzione e la intensità della risultante, possiamo asserire che, al raddoppiarsi, triplicarsi,... dimezzarsi,... delle componenti, deve raddoppiarsi, triplicarsi,.. dimezzarsi,.. anche la risultante; ossia se *p* e *q* danno *r*, certamente $2p$, e $2q$ daranno $2r$; $3p$, e $3q$ daranno $3r$; ed in generale la risultante di np ed nq sarà nr. E poichè n può ricevere qualsivoglia valore, poniamo prima $n=\frac{p}{r}$, ed otterremo che

e la risultante. Imperocchè in ciascuno di questi due triangoli vi ànno due lati, che rappresentano direttamente due

$\frac{p^2}{r}$ con $\frac{pq}{r}$ dà per risultante p; poscia facciamo $n=\frac{q}{r}$ ed avremo che $\frac{q^2}{r}$

Fig. 3.

e $\frac{pq}{r}$ danno insieme q. Avverto che la supposizione dalla quale partiamo, che cioè p con q dia r, è fondata sull'ipotesi che p e q stieno ad angolo retto; però, quando anche queste cangiano valore e diventano $\frac{p^2}{r}$, e $\frac{pq}{r}$, avranno una risultante che conservi lo stesso rapporto con loro, e per conseguenza sia p, purchè esse medesime seguitino a stare ad angolo retto. Così pure $\frac{q^2}{r}$ e $\frac{pq}{r}$ daranno q nell'ipotesi medesime. Conservata quindi alle componenti questa loro posizione relativa, è chiaro che il valore della risultante non dipende dalla posizione assoluta di una delle due. S'immagini pertanto, per chiarezza, che la direzione di $\frac{p^2}{r}$ sia la MR (fig. 3.), dovrà la $\frac{pq}{r}$ avere la direzione ortogonale MN. Parimenti fingo che la giacitura di $\frac{q^2}{r}$ sia la stessa MR; e la posizione di $\frac{pq}{r}$ dev' essere ortogonale ad MR, e di più invece di combaciare con MN può stare per dritto con questa. È manifesto così, che le due MO, MN, uguali a $\frac{pq}{r}$, e direttamente opposte, si elideranno a vicenda; e quindi rimarranno vive le sole $\frac{p^2}{r}$, $\frac{q^2}{r}$. Ora queste sono perfettamente cospiranti. Dunque la risultante loro sarà uguale alla loro somma. Ma tale risultante è la risultante e di $\frac{p^2}{r}$ con $\frac{pq}{r}$, ossia di p, e di $\frac{q^2}{r}$ con $\frac{pq}{r}$, ossia di q; e la risultante di p e q l'abbiamo chiamata r. Dunque $r=\frac{p^2}{r}+\frac{q^2}{r}$; e però $r^2=p^2+q^2$. Dal che si vede che la r dev'essere rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo, i cui cateti rappresentino p e q. Il perchè ag-

delle dette forze, ed il terzo lato è precisamente uguale alla terza di esse medesime.

2° Ognuna delle tre forze è uguale alla radice quadrata della somma formata dai quadrati delle altre due, e dal doppio prodotto di esse medesime moltiplicate fra loro e col negativo coseno del loro angolo. Giacchè si sa dalla Trigono-

giungendo a tale triangolo l'altro uguale, che compie il parallelogrammo, si vedrà che in questo le linee rappresentanti p e q riescono lati adiacenti, e che l'ipotenusa comune, ossia la risultante cercata, è la diagonale del parallelogrammo medesimo.

Alla stessa conclusione si riesce nel caso che le due forze stieno ad angolo acuto PMQ (fig. 4.). Infatti al parallelogrammo MPRQ si circoscriva il rettangolo MNRO, e dall' estremo P del lato MP s'innalzi la PS perpendicolare all' altro lato MQ. Dalle cose or ora dimostrate discende, che una forza può sempre considerarsi come risultante di altre due poste ad angolo retto, purchè queste possano essere rappresentate dai lati adiacenti del rettangolo avente a diagonale la rappresentante della forza medesima. Perciò MP può essere rappresentata dalle due MN, MS. Quindi le due forze MP ed MQ equivalgono alle tre MS, MQ, MN; e queste, poichè MS è uguale ad OQ, equivalgono alle tre OQ, QM, MN, o ciò che è lo stesso alle due MO, ed MN. Ma queste essendo i due lati di un rettangolo ànno per diagonale la MR. Questa è dunque la risultante di MQ ed MP.

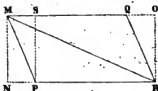



Fig. 4.

Ove poi le due forze fossero rappresentate da MP ed MQ, collocate ad angolo ottuso PMQ (fig. 5.), sarebbe da compire il parallelogrammo, prolungare la QM, e mandare dai tre angoli del triangolo PMR, ai due lati opposti MQ, PR del parallelogrammo, tre perpendicolari PS, MO, NR; e poi ragionar così. La forza MP può essere rappresentata dalle due MS ed MO; e però le due MP ed MQ equivalgono alle tre MQ, MS, MO. Siccome per altro le due forze MS, ed MQ sono direttamente opposte, daranno per risultante la sola differenza MN. Quindi le due forze MP ed MQ si riducono alle due altre MN ed MO. Ma queste ànno, come sappiamo, per risultante la diagonale del rettangolo OMNR; la quale è la diagonale del parallelogrammo compresa fra le due forze componenti. Dunque ecc.

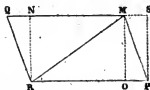



Fig. 5.

metria che tale è il valore di ciascuno dei tre lati di un triangolo; cioè $\overline{MR}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2MQ.QR \times cos.MQR$; (fig. 6.); ed $\overline{MP}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{PR}^2 - 2MR.PR.cos.MRP$; ed $\overline{MQ}^2 = \overline{MR}^2 + \overline{QR}^2 - 2MR.QR.cos.MRQ$. Riflettendo quindi che $QR = MP$; $PR = MQ$; l'angolo MQR è supplemento di PMQ, ed à però lo stesso coseno di questo, quanto al valore, ma di segno contrario; l'angolo MRP $=$ QMR; MRQ $=$ PMR; e chiamando p la MP, q la MQ, ed r la MR, α l'angolo formato dalla q e dalla r ossia QMR, β quello racchiuso fra la p e la r cioè PMR, e γ quello compreso dalla p e dalla q, ossia PMQ; quelle equazioni si traducono nelle seguenti:

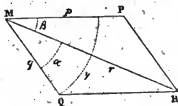



Fig. 6.

$$p^2 = r^2 + q^2 - 2qr.\ cos.\ \alpha;$$
$$q^2 = r^2 + p^2 - 2pr.\ cos.\ \beta;$$
$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq \times (-\ cos.\ \gamma.) = p^2 + q^2 + 2pq.\ cos.\ \gamma.$$

3° Ognuna delle tre dette forze è risultante delle altre due. In fatti (fig. 7.) prolungata la QM, e condotta la PQ′ parallela ad MR, è evidente che MQ′ è uguale alla q, e che la forza p è la risultante di MR e di MQ′$=$MQ. Come pure prolungata la PM, e condotta la QP′ parallela ad MR, risulta la P′M uguale alla p; e si vede a colpo d'occhio che MQ è la risultante di MR e di MP′$=$MP.

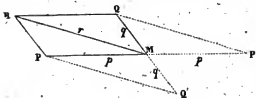



Fig. 7.

4° Ciascuna delle tre forze è proporzionale al seno dell'an-

golo formato dalle altre due. Imperocchè in ogni triangolo i lati stanno fra loro, come i seni degli angoli opposti. Ora (1°) le componenti e la risultante sono rappresentate dai tre lati di un triangolo. Dunque le tre forze stanno fra loro, come i seni degli angoli opposti alle tre rette, che le rappresentano. Ma ognuno di questi angoli opposti o è formato dalle altre due forze, o à un seno uguale a quello dell'angolo formato da queste. Mi spiego meglio. Nel triangolo MPR (fig. 6.) certo MP : PR : MR :: *sen.* MRP : *sen.* PMR : *sen.* MPR. Ora facciamo $MP = p$; $PR = MQ = q$; $MR = r$; e di più $MRP = RMQ = \alpha$; $PMR = \beta$; $MPR = 180° - \gamma$, e però *sen.* MPR = *sen.* γ; ed avremo

$$p : q : r :: sen.\,\alpha : sen.\,\beta : sen.\,\gamma$$

Ma α è l'angolo (3°) formato da q e da r, β è quello formato da p e da r, γ è il compreso fra p e q. Dunque ecc.

*5° Ove ne sia dato il valore di due forze concorrenti in un punto, e dell'angolo fra loro compreso, è facile ritrovare il valore degli angoli formati da esse medesime colla loro risultante. Imperocchè seguitando a chiamare colle solite lettere (2°) le tre forze (cioè le due componenti e la risultante) e gli angoli fra loro compresi; pel corollario antecedente potremo dire, che $p : r :: sen.\,\alpha : sen.\,\gamma$. Donde trarremo

$$sen.\,\alpha = \frac{p.\,sen.\,\gamma}{r}.$$

Parimenti poichè $q : r :: sen.\,\beta : sen.\,\gamma$; sarà anche

$$sen.\,\beta = \frac{q.\,sen.\,\gamma}{r}.$$

Nei secondi membri delle quali equazioni non vi à d'incognito che la sola r. Ma questa r medesima è data dai valori di p, q, e γ; come apparisce dalla formola

$$r = \sqrt{(p^2 + q^2 + 2pq.\,cos.\,\gamma)}$$

stabilita nel corollario secondo. Dunque ecc.

6° Due qualunque, di queste forze, stanno fra loro in ragione inversa delle perpendicolari condotte, sulle loro dire-

zioni, da un punto preso ad arbitrio sulla direzione della terza. Dappoichè ciascuna di queste perpendicolari è il seno dell'angolo formato dalle due forze, fra le quali essa si ritrova; e ciascuna forza sta alle altre, come i seni degli angoli formati dalle altre due. Più chiaramente: la retta CD (fig. 8.) condotta da un punto C, preso ad arbitrio nella direzione MR della risultante r, normalmente alla direzione MP della componente p, è seno dell'angolo CMP formato dalle due dette direzioni. Parimenti la CE, condotta dallo stesso punto C normalmente alla direzione MQ dell'altra componente q, è seno dell'angolo CMQ compreso fra la direzione della risultante e quella di quest'altra componente medesima. Dunque (4°) $p : q :: CE : CD$. Al modo medesimo SN ed SE, condotte da un punto arbitrario S della direzione di p perpendicolarmente la prima alla direzione di r, la seconda alla direzione della q, sono seni degli angoli fatti dalla p colla r, e dalla stessa p colla q. Onde $q : r :: SN : SE$. Finalmente ON ed OD, condotte dalla q normalmente sulla r e sulla p, sono i seni degli angoli formati da q con r, e da q con p. E però $p : r :: ON : OD$.

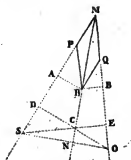



Fig. 8.

4. Composizione e risoluzione delle forze applicate ad un punto. — È altresì fondamentale nello studio della Meccanica la teorica della composizione e decomposizione di più forze, applicate ad un sol punto. Intorno alla quale prima risolveremo quei pochi problemi, che possono servire d'esempio per tutti gli altri casi, e poi esporremo i principali canoni per riconoscere quando col comporre più forze si riesca all'equilibrio. Siccome per altro la risultante può ritrovarsi anche algebricamente; così agli altri problemi geometrici ne aggiungeremo uno algebrico.

I. PROBLEMI. 1° *Risolvere una forza data in due altre.*

Risoluzione. Considerata la MR (fig. 9.) come diagonale,

vi si costruiscano intorno quanti si vuole parallelogrammi MPRQ, MP′RQ′, MP″RQ″. Ciascuno di questi parallelogrammi è acconcio a risolvere il dato problema.

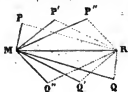
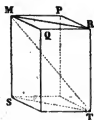
Fig. 9.

Dimostrazione. Infatti in ciascuno di essi parallelogrammi, due lati adiacenti MP ed MQ, oppure MP′ ed MQ′,.... rappresentano due componenti; due forze cioè, le quali, vuoi in energia vuoi in direzione, sarebbero capaci di dar nascimento alla risultante proposta. Dunque il problema è affatto indeterminato, e può ricevere indefinite soluzioni. Per altro si avverta che, determinata una volta in direzione ed intensità una delle due componenti, l'altra resta parimenti determinata : come pure il problema riesce del tutto determinato, ove sia determinata o la sola direzione o la sola intensità di *ambedue* le componenti.

2° *Comporre tre forze applicate ad un sol punto, e giacenti comunque nello spazio.*

Risoluzione. Al punto M (fig. 10.) sieno applicate tre forze MP, MQ, MS; se ne cerca la risultante. Sulle due forze MP, MQ, considerate come lati, si costruisca il parallelogrammo MPRQ, e si tracci la diagonale MR: questa sarà evidentemente la risultante delle due MP ed MQ. Ora sulle due MS, ed MR, considerate parimenti come lati; si compia il parallelogrammo MRTS, e se ne conduca la diagonale MT.

Fig. 10.

Dimostrazione. Questa MT sarà la risultante cercata. Imperocchè essa è certamente la risultante di MS con MR; ma la MR è la risultante di MP con MQ: dunque la stessa MT sarà la risultante di MP, MQ, MS. Il che prova che, se tre forze concorrono in un punto con direzioni qualunque, compiuto il parallelepipedo sulle tre rette, che le rappresentano, la diagonale di questo

(quella, s'intende, che parte dal punto di concorso delle forze) è la risultante loro.

3° *Comporre quante si voglia forze applicate ad un punto e giacenti nel medesimo piano.*

Risoluzione. Sieno (fig. 11.) le forze MP, MQ, MS, MT, MV,.... applicate al medesimo punto M e giacenti tutte in un piano; si domanda la risultante di tutte. All'estremo della retta MP, rappresentante una delle dette forze, si applichi la retta PR parallela ad MQ, cioè alla forza che viene appresso alla MP; quindi si conduca dal punto R una parallela ed uguale alla terza forza MS, e sia la RR'; poscia sull'estremo R' si posi un'altra retta, che sia parallela e uguale alla forza MT; e così via discorrendo; e finalmente si congiunga con M, per mezzo della MR''', l'estremo della R''R'''parallela ed uguale all'ultima delle forze date, cioè MV: dico che MR''' è la risultante richiesta.

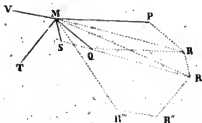



Fig. 11.

Dimostrazione. È manifesto che, congiungendo il punto Q col punto R, si ottiene un parallelogrammo, la cui diagonale MR rappresenta la risultante delle due prime componenti MP, ed MQ. Come parimente è chiaro che, per comporre questa MR colla terza MS delle forze date, si deve condurre la RR' uguale e parallela alla MS, e poi la diagonale MR': e perciò questa MR' è la risultante delle tre prime componenti. Non vi è bisogno d'altro oramai per restar convinti, che la risultante di tutte sarà la retta, congiungente il punto M coll'estremo della retta parallela all'ultima delle date forze.

4° *Decomporre una forza in quante si voglia altre giacenti tutte in un medesimo piano.*

Risoluzione. Basta costruire sulla retta data, che rappre-

senta la risultante, un poligono di tanti lati, quante sono le forze, nelle quali essa si vuole decomporre.

Dimostrazione. La ragione di questa costruzione si ritrova nella soluzione del problema terzo.

* 5° *Date due forze e l'angolo compreso, trovare algebricamente il valore e la giacitura della loro risultante.*

Risoluzione. Il valore della risultante si ricava dall'equazione

$$r^2 = p^2 + q^2 + 2pq.\cos.\gamma$$

già (**3.** IV. 2°) ottenuta. Quanto poi alla giacitura, cioè all'angolo, che diremo α, formato dalla risultante con una, per esempio q, delle componenti, essa potrà ritrovarsi o colle formole sopra (**3.** IV. 5°) esposte, o colla seguente

Fig. 12.

$$tang.\alpha = \frac{p.sen.\gamma}{q + p.cos.\gamma}.$$

La quale si ottiene facilmente, ove si facciano le considerazioni, che qui aggiungiamo. Evidentemente BR (fig. 12.) è seno di α: come ne è coseno la BM: dunque avremo $tang.\alpha = \frac{BR}{BM} = \frac{BR}{BQ + QM}$. Ora I. QM $= q$. II. BR $= p.sen.\gamma$. Imperocchè, nel triangolo rettangolo BQR certamente sarà BR : QR :: *sen.* RQB : 1. Ma QR = PM $= p$; RQB = PMQ $= \gamma$. Dunque BR : p :: *sen.* γ ; 1; e BR $= p.sen.\gamma$. III. BQ $= p.cos.\gamma$, come apparisce dal valore di BR. Per conseguenza, sostituendo questi valori nella formula $tang.\alpha = \frac{BR}{BQ + QM}$, avremo

$$tang.\alpha. = \frac{p.sen.\gamma}{q + p.cos.\gamma}.$$

Dichiarazione. La legittimità della proposta soluzione, che non à bisogno di essere dimostrata, apparirà più chiara per le seguenti applicazioni. I. Sia $\gamma = 0°$. Sarà $cos.\gamma = 1$; e però $r^2 = p^2 + q^2 + 2pq$, ossia $r = \sqrt{(p^2 + 2pq + q^2)} = p + q$.

Inoltre sarà $sen.\gamma = 0$; e quindi $tang.\alpha = \frac{p}{q + p \times 1} \times 0 = 0$.
Il che significa che la risultante sarà uguale alla somma delle componenti, come avevamo richiesto (s. I. 3°) per postulato, e si troverà sulla loro direzione comune. II. Si faccia $\gamma = 180°$. Avremo $cos.\gamma = -1$; e perciò $r = \sqrt{(p^2 - 2pq + q^2)}$, $r = p - q$. Di più $sen.\gamma = 0$, e però $\alpha = 0°$. Dunque la risultante di due forze diametralmente opposte è uguale, come domandammo (s. I. 4°) per postulato, alla differenza loro; agisce sulla loro comune direzione, e nel senso della maggiore. III. Poniamo $\gamma = 90°$. In tal caso $cos.\gamma = 0$, ed $r = \sqrt{(p^2 + q^2 + 0)}$. Oltracciò $tang.\alpha = \frac{p}{q + p \times 0} = \frac{p}{q}$. IV. In questo stesso caso se inoltre sia $p = q$, sarà $r = p\sqrt{2}$. Perchè allora avremo $r = \sqrt{(p^2 + p^2 + 2p^2.\ cos.\gamma)} = \sqrt{(2p^2[1 + cos.\gamma])}$. Ma $1 + cos.\gamma = 2.cos^2.\frac{1}{2}\gamma$. Giacchè sappiamo dalla Trigonometria che $cos.(a + b) = cos.a.cos.b - sen.a.sen.b$; Ove fatto $a = b$, si ottiene $cos.2a = cos^2.a - sen^2.a$. Sappiamo inoltre che $sen^2.a + cos^2.a = 1$; sommando queste equazioni avremo $sen.^2 a + cos^2.a + cos^2.a - sen^2.a = 1 + cos.2a$, ossia $2.cos^2.a = 1 + cos.2a$, e supposto che l'angolo invece di esser a sia $\frac{1}{2}.a$, potremo dire che $2.cos^2.\frac{1}{2}a = 1 + cos.a$.
sostituendo pertanto il $2.cos^2.\frac{1}{2}\gamma$ all' $1 + cos.\gamma$, otterremo

$$r = \sqrt{(2p^2.\ 2\,cos^2.\frac{1}{2}\gamma)} = \sqrt{(4p^2.cos^2.\frac{1}{2}\gamma)} = 2.\ p.\ cos.\ \frac{1}{2}\gamma.$$

Quindi è che nell' ipotesi, in cui ci troviamo, che $\gamma = 90°$, potremo dire $r = 2.p.cos.45°$. Ma $cos.\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dunque

$$r = 2p.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2p}{\sqrt{2}} = \frac{2p.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{2p.\sqrt{2}}{2} = p.\sqrt{2}.$$

II. CANONI. Sono della più grande evidenza le seguenti proposizioni.

1° Quando nel comporre più forze la risultante riesce nulla, il punto materiale, cui esse forze sono applicate, sta in equilibrio.

2° E viceversa: affinchè un punto materiale sottoposto a più forze sia in equilibrio, è necessario che la risultante di tutte sia nulla.

3° Quando una delle componenti è uguale e direttamente opposta a tutte le altre forze, certamente il punto materiale è in equilibrio.

4° A rincontro: affinchè un punto materiale, sollecitato da più forze, rimanga in equilibrio, è necessario che una delle componenti sia uguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le altre.

5° Che se la risultante di più forze à un valore, ad ottener l'equilibrio basta applicare al punto materiale un' altra nuova forza, uguale e direttamente opposta alla risultante medesima.

5. Scompartimento della presente Sezione. — Uno dei più importanti trattati di Fisica, fra quei ch'abbisognano del calcolo, è senza dubbio quello, il quale si aggira sulle teoriche fondamentali dell'equilibrio e del moto dei ponderabili, e che suole più comunemente denominarsi *Meccanica*. Or dunque essendo i ponderabili (quando non se ne voglia considerare per astrazione un solo elemento o punto materiale, come si è fatto nelle precedenti Nozioni preliminari) distribuiti in corpi solidi, liquidi, e vaporosi; e di più le leggi dell'equilibrio e del moto notabilmente diversificando, a seconda che si riferiscono a tale o tale altro stato dei corpi; ne nasce spontaneo lo scompartimento della presente Sezione in tre Capi. Al primo dei quali si attribuiscano le considerazioni meccaniche relative ai corpi solidi; al secondo si riportino quelle che spettano ai liquidi; e si rimandino finalmente al terzo quelle poche dottrine sull' equilibrio e moto dei vapori, le quali si dilungano in qualche maniera dalle teorie che essi, come quelli che son fluidi, ànno comuni coll'altra classe dei fluidi, vale a dire coi liquori. A dir vero,

se avessimo voluto attenerci all' uso che principia ad introdursi, avremmo dovuto al primo Capo imporre il titolo di Meccanica, di Idraulica al secondo, e di Pneumatica al terzo. In quella vece, amiamo meglio di conservare a questi nomi le loro genuine significazioni: secondo le quali, la Meccanica abbraccia tutti a tre i Capi; l'Idraulica è più l'arte parziale di regolare il corso de' fiumi, e le loro arginature, che una scienza generale propriamente detta ; ed in fine la Pneumatica riguarda certe proprietà dell'aria, le considerazioni delle quali, a rigore, non ànno nulla che fare nè col moto, nè coll'equilibrio. Per la qual cosa intitoleremo i singoli Capi dal tema su cui s'aggirano.

CAPO PRIMO.

EQUILIBRIO E MOTO DEI SOLIDI.

6. Ripartizione di questo Capo. — Quella parte della Meccanica, in cui si tratta dell'equilibrio suol dirsi *Statica*, e *Dinamica* quella, nella quale si ragiona del movimento. Avendo noi divisa la trattazione della Meccanica in tanti Capi, quanti sono gli stati dei corpi; dovremo in ciascuno occuparci tanto dell'equilibrio, quanto del moto. Egli è perciò, che principieremo dal dividere questo Primo Capo in due Articoli; del primo dei quali sarà argomento la Statica dei solidi, che può dirsi *Stereostatica*, e del secondo la Dinamica dei medesimi, la quale può chiamarsi *Stereodinamica*. Innanzi per altro di entrare in matéria, avviso che in ciascuno di questi, seguendo le traccie dei più grandi Matematici, e segnatamente di Newton, premetteremo lo studio di certe forze ipotetiche astratte, il quale appartiene alla così detta *Meccanica razionale*, a quello della *Meccanica applicata*, ossia delle forze realmente esistenti in natura.

ARTICOLO I.

STEREOSTATICA.

7. Risultante di due forze oblique applicate agli estremi di una verga rigida. — Abbiamo discorso, nelle Nozioni preliminari, dell'equilibrio di un sol punto materiale; conviene ora che ci avviciniamo un po' più d'appresso al tema dei solidi, stabilendo qualche nozione sull'equilibrio di un sistema rigido.

I. DEFINIZIONI. 1ª Si chiama *sistema rigido* un insieme di punti materiali non pesanti, ma invariabilmente congiunti fra loro.

2ª Una *verga rigida* è un sistema rigido rettilineo; cioè una retta inflessibile ed infrangibile formata da punti materiali senza peso.

II. POSTULATO. Se due forze uguali e direttamente opposte

sieno applicate, una ad un estremo, e l'altra all'altro estremo di una medesima verga rigida giacente nella lor comune direzione, esse si faranno vicendevolmente equilibrio.

III. COROLLARII. 1° Dunque ad ottener l'equilibrio in un sistema rigido animato da una forza sola, non c'è bisogno di applicare la seconda forza uguale e contraria precisamente nel punto, a cui è applicata la prima; ma può applicarsi in un altro punto qualunque, il quale per altro sia nel prolungamento della direzione della prima.

2° Lo stesso dicasi nel caso di un sistema rigido sollecitato da più forze. Nel quale l'equilibrio si otterrà, purchè la forza, uguale ed opposta alla risultante di tutte, venga applicata ad un punto a piacere preso nella direzione di questa.

3° Una forza può, senza che se ne alteri l'effetto, traslocarsi ed applicarsi a qualunque dei punti del sistema rigido esistenti nella direzione sua. Infatti sia applicata in A (fig. 13.) la forza AP; è, preso nella sua direzione un punto qualunque M invariabilmente congiunto con A, vi si applichino due forze Mp, Mq contrarie direttamente fra loro ed uguali ad AP. Ciò non altera punto l'effetto della AP: perchè le due Mp ed Mq per sè sole producono l'equilibrio. Ma Mq elide completamente la AP: come quella che non solo le è uguale e direttamente opposta, ma produce eziandio lo stesso effetto (2°), che produrrebbe se fosse applicata al punto A. Per la qual cosa resta efficace la sola Mp. Questa dunque potrà sostituirsi alla AP, senza che ne sia menomamente alterato l'effetto.

q

M

p

A

P

Fig. 13.

IV. PROPOSIZIONE. Agli estremi della verga rigida AB (fig. 14.) sieno applicate due forze AP, e BQ, che chiameremo p, e q, giacenti in un medesimo piano ed oblique fra loro; e sia O il punto, per cui la direzione della loro risultante trapassa la detta AB. Si chiami l tutta la AB medesima, d la distanza di O dal punto A, α l'angolo acuto SAB fatto dalla AP con AB, e β l'altro SBA formato dalla stessa AB con BQ. Sosteniamo che:

La risultante di due forze oblique, applicate l'una ad uno, l'altra all'altro estremo di una verga rigida, è uguale in energia e direzione, *alla diagonale del parallelogrammo formato sulle due rette rappresentanti le dette forze; e colla sua direzione trapassa la verga rigida in un punto, determinato dalla formula*

$$d = \frac{q \,.\, l \,.\, sen.\beta}{p \,.\, sen.\,\alpha + q \,.\, sen.\beta}.$$

1° *Dimostrazione della parte prima.* Si supponga che le due forze sieno divergenti, e si prolunghino indefinitamente le loro direzioni: queste certamente s'incontreranno, per esempio in S. Le due forze s'intendano applicate nelle loro rispettive direzioni al medesimo punto S; vale a dire si prenda la SM=AP, e la SN=BQ. Questo (3°) non ne altera l'effetto: quindi, compiuto su queste due rette, SM ed SN, il parallelogrammo SMRN, si tracci la diagonale SR. La teoria del parallelogrammo delle forze, ed il corollario or ora stabilito, dimostrano che questa SR è la risultante cercata; come si è asserito nella prima parte della proposizione.

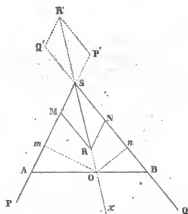



Fig. 14.

2° *Dimostrazione della seconda parte.* Da un punto qualunque, esempigrazia O, preso sulla direzione della risultante, si mandino due rette Om, On normali rispettivamente alle direzioni delle due forze. Poichè so che queste (**3**.IV.5°) stanno fra loro in ragione inversa delle forze, potrò stabilire la proporzione Om : On :: q : p; donde p. Om$=q$. On. È noto dalla Trigonometria che, nei due triangoli rettangoli AOm, BOn, il lato Om=AO. *sen.* α; ed On=BO. *sen.* β. Dunque p. AO. *sen.* $\alpha = q$. BO. *sen.*β. Ora AO$=d$; BO$=l-d$; quindi $p.\ d.\ sen.\ \alpha = q\,(l-d).\ sen.\ \beta = ql.\ sen.\ \beta - qd.\ sen.\ \beta$.

E però $p.d.\ sen.\ \alpha + q.\ d.\ sen.\ \beta = q\,l.\ sen.\ \beta$; ed anche $d\,(p.\ sen.\ \alpha + q.\ sen.\ \beta) = q l.\ sen.\ \beta$; e finalmente

$$d = \frac{ql.\ sen.\ \beta}{p.\ sen.\ \alpha + q.sen.\ \beta}.$$

3° *Dimostrazione del caso inverso*. Vale la stessa dimostrazione pel caso, in cui le due forze fossero convergenti come Am, Bn: perchè, traslocate parimente in S, darebbero un ugual parallelogrammo, la cui diagonale sarebbe per diritto coll'antecedente e avrebbe una direzione passante per O.

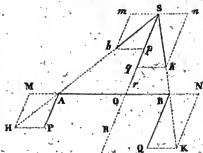
8. Risultante delle forze parallele e cospiranti.—

I. PROPOSIZIONE. *La risultante di due forze parallele, cospiranti, ed applicate alle estremità di una verga rigida, è parallela alle componenti, cospirante con esse, ne agguaglia la somma, e si applica ad un punto che divide la retta nella loro ragione inversa.*

1° *La risultante sopraddetta è parallela alle componenti, cospirante con esse, ed uguale alla loro somma.* Per le applicazioni di questo teorema non è necessario che le forze sieno *matematicamente* parallele, ma basta che lo sieno solo *sensibilmente* o *fisicamente*. Ora due rette esattissimamente, ma fisicamente, parallele possono incontrarsi a distanza immensa. Dunque le due forze parallele, delle quali trattiamo, possono considerarsi applicate ad un unico punto collocato alla più grande distanza, e dirette verso i due estremi della verga rigida, la quale si suppone brevissima in confronto alla distanza medesima. Il che (**4**.I.5°) non ne altera punto l'effetto. In questa considerazione le due forze formano fra loro un angolo *matematicamente* tanto piccolo, da potersi dire *fisicamente* nullo: ossia le due forze sensibilmente si sovrappongono l'una all'altra. Dunque la loro risultante deve avere i caratteri della risultante di due forze perfettamente cospiranti: dev'esser cioè (**3**.I.3°) sensibilmente uguale alla somma delle componenti, cospirante con esse, e parallela alla loro direzione [1].

[1] La cosa medesima può dimostrarsi nella seguente maniera. Sul punto A (fig. 15.) sia applicata la forza AP, e sul punto B un'altra forza

2° *La direzione della risultante trapassa la verga rigida in un punto, che la divide in parti inversamente proporzionali alle forze stesse.* Imperocchè, mandate dal punto C (fig. 16.), in cui la risultante traversa la verga rigida, due

BQ, parallela ad AP e cospirante con essa. Affine di ritrovare la intensità e la direzione della risultante di queste due forze, si applichino ai punti A e B due altre forze, AM e BN, di intensità arbitraria, ma uguali fra loro e direttamente opposte: le quali, poichè si elidono perfettamente a vicenda, non alterano punto le condizioni del problema. Dopo ciò, si componga la AM colla AP, e si tracci la diagonale AH: si componga eziandio la BN colla BQ, e si segni l'altra risultante BK. Quindi le direzioni di queste due risultanti, (le quali giacciono certo nello stesso piano, e sono oblique fra loro) si prolunghino indefinitamente, e le risultanti medesime si trasportino nel punto S del loro incontro; cotalchè la AH venga rappresentata da Sh, e la BK da Sk. Ciò fatto tanto la Sh che la Sk si decompongano in due altre forze, una delle quali, Sn ed Sm, sia parallela ad AB, e l'altra, Sp ed Sq, riesca parallela ad AP o BQ. E chiaro che ciò si ottiene per mezzo dei due parallelogrammi Smhp, uguale e di lati rispettivamente paralleli ad MAPH, ed Snkq uguale e coi lati paralleli a BNKQ. Per conseguenza nei detti parallelogrammi i lati Sm ed Sn rappresentano due forze uguali e direttamente opposte, le quali perciò si elidono a vicenda. Restano quindi efficaci le sole due forze Sp ed Sq. Le quali evidentemente I. sono parallele alle componenti, II. riescono cospiranti con queste, III. danno una risultante (4.I.5° I.) uguale alla loro somma.

F. 15.

Resta ora a dimostrare, che la direzione della risultante trapassa la verga rigida in un punto O tale, che AP : BQ :: OB : OA. Il che si trae dal segnente discorso. Per la somiglianza dei triangoli SAO ed Shp può dirsi che AO : hp :: SO : Sp; e dalla somiglianza degli altri due SBO ed Skq si ricava BO : kq :: SO : Sq. Ma Sp è uguale ad AP; Sq alla BQ; hp=kq. Dunque sostituendo otterremo tradotta la prima proporzione in AO : hp :: SO : AP; e la seconda in BO : hp :: SO : BQ. Quindi AO×AP=SO×hp; BO×BQ=SO × hp. Donde potremo dedurre che AO×AP=BO×BQ, e finalmente AO : BO :: BQ : AP.

perpendicolari, CM, CN, sulle direzioni delle componenti AP e BQ; queste perpendicolari riescono (2.IV.5°) inversamente proporzionali a quelle forze. Ma le perpendicolari medesime sono direttamente proporzionali alle porzioni AC e BC della retta: perchè i triangoli ACM, BCN sono evidentemente simili. Dunque quelle due, AC, e BC, sono inversamente proporzionali alle due dette forze AP, e BQ: ossia in formula

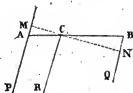



Fig. 16.

AC: BC = BQ: AP.

II. COROLLARII. 1° Dunque una forza data qualunque si può risolvere in due altre parallele alla data, formanti in somma una grandezza uguale alla medesima, ed applicate a due punti tali, che la retta, che li congiunge, venga divisa dalla forza data in parti inversamente proporzionali alle componenti ritrovate.

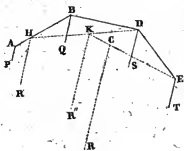
2° Ove poi sieno dati anche gl'intervalli fra i punti di applicazione delle componenti, e il punto (della retta che li congiunge) per cui passa la forza data; a risolvere il problema non si avranno che a determinare due forze, la somma delle quali sia uguale alla data, e le quali di più riescano inversamente proporzionali ai detti intervalli.

3° Che se ai punti A, B, D, E,... (fig.17.), comunque collocati, sieno applicate rispettivamente le forze AP, BQ, DS, ET,...; la risultante di tutte sarà parallela alle componenti, uguale alla somma loro ed applicata ad un punto che potrà determinarsi col comporre prima due forze fra loro, poi la risultante di esse colla terza, e via dicendo. Infatti la risultante HR′ di AP e BQ è parallela ed uguale alla somma di

Fig. 17.

queste due; componendo quindi HR′ con DS, la risultante KR″ è parallela parimenti ed uguale alla somma delle prime tre, la risultante CR della KR″ composta con ET è uguale alla somma di tutte e quattro le componenti. Il punto H poi si è determinato secondo la condizione che AH : BH :: BQ : AP; il punto K dipende dalla proporzione HK : DK :: DS : HR′; ed il punto C di applicazione della risultante di tutte CR è legato alla legge medesima che

$$KC : EC :: ET : KR''.$$

9. Risultante delle forze parallele ed opposte. — I. PROPOSIZIONE. *La risultante di due forze parallele, ma inverse e disuguali, è parallela alle componenti, uguale alla loro differenza, cospirante colla maggiore, e passa per un punto preso nella direzione della verga rigida, il quale sta fuori di questa, rimane dalla parte della forza maggiore, e dista dai punti di applicazione delle componenti in ragione inversa di questesse.*

Dimostrazione. Sieno AP e BQ (fig. 18.) le due forze parallele ed inverse, si risolva AP in due (**8.** II. 1°) parallele cospiranti, una delle quali sia BD uguale e contraria alla BQ. Sappiamo che l'altra OR dev'essere uguale alla differenza che passa fra AP e BD, ossia = AP — BQ, e dev'essere applicata sul prolungamento AO della AB in un punto O tale, che sia

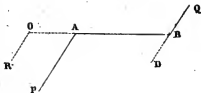



Fig. 18.

AB : AO :: OR : BD. Ciò posto, si rifletta che delle tre forze OR, BD, BQ, alle quali sono state ridotte le forze AP, e BQ, due, cioè BD, e BQ, si elidono a vicenda. Rimane dunque efficace la sola OR; la quale per conseguenza sarà la risultante cercata. Or bene: I. La risultante OR deve cadere fuori della AB: perchè AP, considerata come la risultante di due forze cospiranti BD, OR deve giacere in mezzo ad esse (**8.** I. 2°). II. La stessa OR, deve trovarsi dalla parte di AP, ossia della compo-

nente maggiore, e cospirare con questa. Dacchè l' opposto non potrebbe avvenire, se non nel caso che si potesse decomporre la BQ in due; una delle quali fosse uguale e contraria alla AP: il che è assurdo, come è assurdo che una componente di due forze parallele superi la risultante. III. Sarà OB : AO :: AP : BQ. Infatti possiamo dire che per costruzione AB : AO :: OR : BD, ossia AB : AO :: AP — BQ : BQ. Dunque componendo otterremo anche quest'altra proporzione AB + AO : AO :: AP — BQ + BQ : BQ. Onde evidentemente

OB : AO :: AP : BQ. [1]

[1] Altri amano la seguente dimostrazione più complicata. La verga rigida AB (fig. 19.), a cui sono applicate le due forze AP, BQ parallele, disuguali ed inverse, venga divisa per metà in M; ed ivi si applichino due altre forze AM, BM diametralmente opposte ed uguali fra loro: le quali non alterano certamente l'effetto delle prime AP, BQ. Si componga quindi l'AP con AM, e si prolunghi indiffinitamente la direzione della risultante AH: altrettanto si faccia per le due BQ, BM, e per la loro risultante BK. Queste due prolungazioni AS, KS s' incontreranno, com' è manifesto: dacchè esse non potrebbero essere parallele, se non nel caso in cui BQ fosse uguale ad AP; il che è contro l'ipotesi. Ora al punto

Fig. 19.

d'incontro S, e sulla loro stessa direzione si applichino la BK, e la AH, sostituendo loro le due Sh ed Sk. Ognuna di queste ultime poscia si decomponga in due altre; una delle quali, cioè Sm, Sn, sia parallela ed uguale alla AM o alla BM; e l'altra, sia rispettivamente parallela ed uguale alla AP, ed alla BQ (vale a dire Sp parallela ed uguale ad AP, Sq parallela ed uguale alla BQ). Le quattro forze Sp, Sq, Sm, Sn equivalgono alle due Sh ed Sk; le quali alla lor volta equivalgono alle quattro AM, AP, BM, BQ, oppure (ciò che è lo stesso) alle due sole AP, BQ. Ora due delle dette quattro forze, cioè Sm, ed Sn, si elidono perfettamente a vicenda; rimangono dunque per equivalenti, alle due AP, BQ, le sole due Sp, ed Sq; e però la risultante di queste sarà eziandio la risultante di

IV. Finalmente la risultante OR è uguale alla differenza, che passa fra le due componenti AP e BQ. Perocchè (s. II. 1°) dev'essere $OR + BD = AP$; ma $BD = BQ$; per conseguenza sarà $OR = AP - BQ$.

II. COROLLARII. 1° Possono comporsi in una quante si voglia forze parallele, applicate al medesimo sistema rigido, e dirette comunque. Imperocchè, ove a più punti invariabilmente congiunti fra loro fossero applicate tante forze parallele, ed agenti quali in un senso e quali nell'opposto, componendo insieme tutte le cospiranti fra loro, si ricadrebbe nel caso di due sole forze parallele ed inverse.

2° Il punto, preso nella direzione della verga rigida, pel quale trapassa la risultante di due forze parallele, sia dirette,

quelle. Ma la risultante delle forze Sp ed Sq è I, uguale alla differenza loro: perchè tale (3.I.4°) è la risultante di due forze diametralmente opposte; II. agisce nella loro stessa direzione comune, che per costruzione è appunto quella delle forze AP, BQ; III. finalmente cospira colla maggiore. Dunque altrettanto dee dirsi della risultante delle primitive due forze AP, e BQ.

Si vede inoltre a colpo d'occhio, che la direzione di tale risultante non può passare che dalla parte della forza maggiore. Che poi il punto O, pel quale essa traversa la direzione della verga rigida, disti dai punti d'applicazione delle forze in ragione inversa di questa stessa, o in breve che $AO : BO :: BQ : AP$, si dimostra agevolmente. Conciossiachè la simiglianza dei due triangoli AOS, APH ci dà diritto di affermare, che $OS : AO :: AP : PH$; ed, essendo $PH = AM$, anche

$$OS : AO :: AP : AM.$$

Come pure la somiglianza degli altri due BOS, BMK ci dà la proporzione $BO : OS :: MB : MK$; oppure, essendo $BM = AM$, ed $MK = BQ$,

$$OS : BO :: BQ : AM.$$

Dalla prima proporzione ottengo $OS \times AM = AO \times AP$, per la seconda posso dire $OS \times AM = BO \times BQ$: quindi $AO \times AP = BO \times BQ$; e finalmente

$$AO : BO :: BQ : AP.$$

La qual proporzione contiene la soluzione del problema, pel quale si domanda la distanza AO; cioè dove la risultante traversi la direzione della verga rigida. A tal uopo si chiami p la AP, q la BQ, x la AO, l la AB. Sarà $BO = l + x$, e la soprascritta proporzione si tradurrà così: $p : q :: l + x : x$; donde $px = ql + qx$; $px - qx = ql$;

$$x = \frac{ql}{p-q} = \frac{ql}{r}.$$

sia inverse, non cangia di posizione col mutare la direzione loro. Imperocchè tal posizione è affatto indipendente da questa direzione; ma è collegata unicamente colla posizione dei punti d'applicazione delle componenti, e colla loro energia. È di questo punto che s'intende parlare, ogni qual volta si nomina senz'altro il punto di applicazione della risultante di due forze parallele [1].

[1] Il centro delle forze parallele si può determinare anche algebricamente per mezzo di una formula, e però senza comporre le forze stesse. Premettiamo che il prodotto di una forza per la distanza del suo punto di applicazione o da una retta o da un piano, vien detto *momento* della forza; e che la detta retta o il piano si chiama rispettivamente *asse*, o *piano dei momenti*. Premettiamo inoltre, che il *momento della risultante è uguale alla somma dei momenti delle componenti, prese col loro segno*. A dimostrarlo, sieno A e B (fig.20.) due punti di un sistema rigido, ai quali vengono applicate le due forze $p = AP$, e $q = BQ$, e sia C il punto (della retta che li congiunge) per cui passa la risultante $r = CR$, ossia il centro delle forze parallele. La retta indefinita OX sia l'asse dei momenti; e su questo dai punti A, B, C si mandino le perpendicolari AM, BN, CG, che rappresenteremo per y, y', Y. Finalmente dai punti A e C si mandino sopra la CG e la BN le due Ah, Ck parallele alla OX; ed avremo le due equazioni $Bk = BN - CG = y' - Y$; $Ch = CG - AM = Y - y$. Ciò posto, sappiamo (S. I. 2°), che il punto d'applicazione della risultante di due forze parallele divide la retta, che congiunge i punti d'applicazione di queste, in parti inversamente proporzionali alle dette forze. Ond'è che $p : q :: BC : AC$. Ma per la simiglianza dei triangoli ACh, CBk, possiamo stabilire le proporzioni $BC : AC :: Bk : Ch :: y' - Y : Y - y$. Dunque $p : q :: y' - Y : Y - y$; ossia $pY - py = qy' - qY$. Per la qual cosa $pY + qY = qy' + py$, e $(p + q) Y = qy' + py$. Ma $p + q = r$, dunque

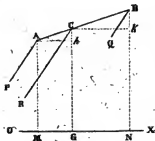



Fig. 20.

$$r . Y = qy' + py.$$

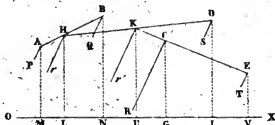
Dunque il momento della risultante è uguale alla somma dei momenti delle componenti. Donde si trae che

$$Y = \frac{py + qy'}{p + q}.$$

3° Date più forze parallele e cospiranti, sappiamo già (s. 11. 3°) che la risultante loro si ritrova determinando prima

Vale a dire, che la distanza Y del centro C delle forze parallele dalla retta OX è uguale al quoto, che si ottiene dividendo per la risultante la somma dei momenti delle componenti.

Veniamo ora al caso di molte forze parallele AP, BQ, DS, ET,..... (fig. 21.), che chiameremo p, q, s, t,....., applicate ai punti A, B, D, E,.... dei quali le distanze AM, BN, DI, EV,.... dall'asse OX dei momenti rappresenteremo per y, y', y'', y''',....; chiamata Y la distanza CG del centro delle forze. Posto che HL rappresenti la distanza del centro delle prime due forze p e q, cioè del punto d'applicazione della loro risultante r, sarà (secondo quello che abbiamo dimostrato or ora) $HL = \frac{py + qy'}{p+q}$. Per la ragione medesima la distanza KU del centro delle tre p, q, s, o delle due s, ed r risultante delle due forze p e q, sarà

Fig. 21.

$$KU = \frac{r \times HL + sy''}{r+s} = \frac{(p+q) \times \frac{py+qy'}{p+q} + sy''}{p+q+s} = \frac{py+qy'+sy''}{p+q+s}.$$

Similmente la distanza DI del centro delle quattro p, q, s, t, o delle due t, ed r' risultante delle tre p, q, s, la otterremo dalla equazione

$$DI = \frac{r' \times KU + ty'''}{r'+t} = \frac{(p+q+s) \times \frac{py+qy'+sy''}{p+q+s} + ty'''}{p+q+s+t} =$$

$= \frac{py+qy'+sy''+ty'''}{p+q+s+t}$. Dunque in generale sarà

$$Y = \frac{py+qy'+sy''+ty'''+\ldots}{p+q+s+t+\ldots}. \qquad (\alpha)$$

la risultante di due; poi congiungendo il punto di applicazione di questa risultante con quello della terza componente, per mezzo di una retta, e supponendo applicata ad un punto di questa retta la risultante delle prime tre; e finalmente congiungendo il punto di applicazione dell'ultima componente con quello della risultante di tutte le altre per mezzo di una retta, ed intendendo applicata ad un punto di quest'ultima la risultante di tutte. Or bene: dalle teorie stabilite

Il che vuol dire, che la distanza (dall'asse immobile) del centro di più forze parallele è uguale alla somma dei momenti delle singole forze, divisa per la somma delle forze medesime, ossia per la risultante di tutte. E questo prova, che anche in tale caso il momento della risultante è uguale alla somma dei momenti delle singole componenti.

Quest'ultima formula ci dà la distanza del centro delle forze da una retta indefinita, ma non ne determina la posizione. Per poter determinare questa, nel caso che tutti i punti d'applicazione A, B, D,... (fig. 22.) delle forze si ritrovassero sul medesimo piano (quello, esempigrazia, di questa pagina), allora basterebbe conoscere la giacitura dei due assi OX ed OY giacenti nel piano medesimo, non che tutte le loro così dette *coordinate*, affinchè fossero conosciute le coordinate del centro delle forze, e quindi la sua posizione. Mi spiego meglio. Le distanze $AM = y$, $BN = y'$, $DI = y''$,... chiamansi le *ordinate* dei punti A, B, D,...; le linee rette poi $OM = AM' = x$; $ON = BN' = x'$; $OI = DI' = x''$;... sono appellate *ascisse*: finalmente per *coordinate* s'intendono le *ascisse* e le rispettive *ordinate*. Or bene; conosciute del *centro delle forze* C le coordinate, cioè l'ascissa $OG = X$, e l'ordinata $CG = Y$; è conosciuta onninamente anche la posizione di esso punto rispetto agli assi OX, OY. Ma la ordinata Y è data dalla formula testè dimostrata, e l'ascissa X dev'essere data da una formula analoga, cioè da

Fig. 22.

$$X = \frac{px + qx' + sx'' + tx''' + \ldots}{p + q + s + t + \ldots} \qquad (\beta)$$

perchè vige anche per essa tutto il ragionamento istituito per la Y.

s'inferisce, che quest'ultimo punto rimane invariabile, comunque cangi la direzione delle forze parallele. Ed è appunto ad esso, che si allude, quando si parla senza più del *punto d'applicazione della risultante delle forze parallele*: sebbene, a dir vero, essa risultante possa supporsi applicata a qualsivoglia punto della direzione sua.

4° Ove, dopo aver determinata la risultante di tutte le forze parallele, si cangi la direzione di tutte queste, e poi si determini la nuova direzione della risultante generale, e così di seguito per quante volte si vuole; rimane dimostrato dalle cose dette, che tutte queste risultanti generali si incrocicchieranno in un medesimo punto, il quale è precisamente il punto d'applicazione della risultante delle forze parallele.

Finalmente si può conoscere la posizione del centro delle forze, ancorchè questo sia collocato comunque nello spazio, per esempio in C (fig. 23.); purchè per altro sieno conosciuti i momenti delle forze medesime, relativamente ai tre piani ortogonali XOY, XOZ, YOZ. Dappoichè, mandando dal punto C tre normali ai detti piani, cioè CE normale al YOZ, e CG ad XOZ, e CF ad XOY; il valore di queste (che sono le tre coordinate ortogonali del punto C, ed equivalgono alle tre DO, AO, BO) è dato dal valore delle forze e delle loro distanze dai detti piani. Infatti i valori di OD ed AO non sono altro che i valori di x e di y: or questi, come mostrano le formule (α) e (β), sono dati dai valori delle forze moltiplicate per le distanze dei loro punti di applicazione dai piani YOZ, XOZ. Il valore poi di CF, che chiameremo Z, dev'essere certamente dato da una formula analoga alle precedenti, ossia da

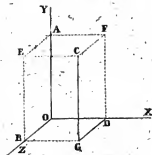



Fig. 23.

$$Z = \frac{pz + qz' + sz'' + tz''' + \dots}{p + q + s + t + \dots}; \quad (\gamma)$$

ove per z, z', z'', z''',.... sono rappresentate le distanze dei punti di applicazione delle forze dal piano XOY. Dunque la posizione del centro delle forze parallele, comunque collocato nello spazio, può esattamente determinarsi per le formule (α), (β), e (γ); o, in altri termini, per i momenti delle forze riferite a tre piani ortogonali fra loro.

5° Dunque, se il punto di applicazione della risultante delle forze parallele fosse fisso, il sistema rigido starebbe in equilibrio: ancorchè le forze, rimanendo parallele tra loro, cangiassero comunque di direzione, e di intensità, non relativa, ma assoluta. Perciocchè è manifesto che la risultante rimane elisa, ed il sistema sta in equilibrio, quantunque volte venga applicata *in qualche punto della sua direzione* un' altra forza che le sia uguale e contraria. Ora il punto di applicazione della risultante delle forze parallele sta nella direzione di questa; ancorchè cangi la direzione delle componenti, e però anche quella della risultante. Inoltre ove tutte le forze componenti mutino le loro intensità; finchè queste conservano la stessa relazione fra loro, il punto d'applicazione della loro risultante non varia; ma solamente si altera l'intensità della risultante. Quando dunque quel punto è fisso, cioè oppone una resistenza invincibile, qualunque sia la direzione e la intensità assoluta delle forze parallele, il sistema rigido dee rimanere in equilibrio.

6° Ma nel caso di due componenti parallele ed inverse, se queste fossero uguali, non produrrebbero certamente l'equilibrio; perchè non sono *direttamente* opposte: nè sarebbe possibile ottenere l'equilibrio, sia con una terza forza, sia fissando il centro delle forze parallele; perchè la risultante loro è nulla.

III. DEFINIZIONE. Il punto di applicazione della risultante delle forze parallele si chiama *centro delle forze parallele*.

10. Centro di gravità. — I. DEFINIZIONI. 1ª Quel punto di un corpo pesante, per cui passa costantemente (ossia qualunque sia la giacitura di detto corpo) la risultante di tutti gli sforzi, che fanno per cadere le sue particelle, si domanda *centro di gravità*. Non è esso al fine, che il centro delle forze parallele: poichè sono fisicamente parallele le direzioni, secondo le quali ciascun punto pesante di un corpo tende a cadere. [1] Per la qual cosa, non si à che a tener fisso il cen-

[1] Sebbene sia vero, che le dette particelle tendono, per la gravità loro, a cadere verso un unico punto esistente nell'interno della Terra; ciò non ostante questo punto è tanto distante da esse, che (ove le medesime faccian parte di un corpo solo, è però distino assai poco tra loro)

tro di gravità di un corpo, affinchè questo non cada più. È perciò, che il centro di gravità si suole anche definire per quel punto, in cui può intendersi riunito tutto il peso di un corpo.

2ª Fra tutte le rette parallele, che segnano le direzioni, secondo le quali i corpi (poco distanti fra loro) cadono, quella che passa pel centro di gravità vien denominata *linea di direzione*.

II. POSTULATI. Ove si tratti di corpi perfettamente omogenei (ossia in ogni lor parte ugualmente pesanti), e di figura simmetrica, si possono stabilire le regole generali per determinarne geometricamente il centro di gravità. Alcune delle quali sono tanto manifeste, che potranno richiedersi a maniera di postulati; altre formano il tema di varii problemi, e di alcune tesi; ed altre finalmente debbono inferirsi con altrettanti corollarii.

1° Il centro di gravità di una retta rigida omogenea è nel suo mezzo. Poichè questa è omogenea, i punti, dei quali essa costa, sono tutti ugualmente pesanti, e si trovano alla stessa reciproca distanza. E però nell'una e nell'altra sua metà esistono le medesime forze; e il centro di gravità sta nel mezzo.

2° Il centro di gravità di una superficie regolare è nella intersezione di due rette, ciascuna delle quali riunisca tutti i centri di gravità di un intero e proprio sistema di sezioni parallele di detta superficie. Dappoichè, divisa tutta la superficie, esempigrazia di un parallelogrammo, con tante linee assai fitte parallelle ad un lato, è certo che il centro di gravità deve trovarsi in qualche punto della retta, che congiunge i centri di gravità di queste linee, le quali si considerano come gli elementi di tutta l'area del parallelogrammo. Ora tal retta divide per metà tutti questi elementi, e però passa pel vero punto medio del parallelogrammo. Inoltre, distribuita la superficie medesima in tanti altri elementi o linee parallele ad un altro lato adiacente al primo, il centro di gravità si ritroverà

le vie da loro seguite nel cadere, si ritrovano, colle più accurate osservazioni, *fisicamente* sì, ma esattissimamente, tutte parallele. Infatti son tali più fili a piombo, purchè stieno poco distanti fra loro.

anche su di un' altra retta, la quale passa pei centri di gravità di quest'altro sistema di parallele. Quindi è, che il centro di gravità di tutta la superficie starà nella intersezione delle medesime due rette.

3° Il centro di gravità di un solido regolare è nella intersezione di due rette, ciascuna delle quali riunisce tutti i centri di gravità di un intero sistema di lamine infinitesime, o superficie piane, parallele, e costituenti tutto il solido.

III. PROBLEMI. 1° *Trovare il centro di gravità di un triangolo.*

Risoluzione. Dal vertice A (fig. 24.) del triangolo ABC, si abbassi la retta AM sul punto medio M della base BC. Parimenti si divida per metà in N il lato AC; e si congiunga, per la BN, questo punto N col vertice B dell'angolo ABC. Dico che il centro di gravità del triangolo sta in G, vale a dire nel punto d'intersezione della AM colla BN.

Dimostrazione. La retta AM divide per metà, nella superficie triangolare ABC, tutti gli elementi paralleli a BC. Infatti condotta la EF parallela a BC, la quale taglia in D la AM, i due triangoli ADE, ABM, come pure gli altri due ADF, ACM sono evidentemente simili fra loro: è però ED : BM :: AD : AM ; ed FD : CM :: AD : AM. Quindi avremo anche ED : BM :: FD : CM; ed invertendo i medii, ED : FD :: BM : CM. Ond'è che come CM è uguale a BM, così pure ED è uguale ad FD. Parimenti la retta BN divide per metà nel triangolo tutti gli elementi che sono paralleli ad AC. Dunque (II. 2°) il centro di gravità del triangolo ABC starà nel punto G, che è appunto quello d'intersezione della AM colla BN.

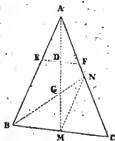



Fig. 24.

2° *Trovare il centro di gravità di un trapezio.*

Risoluzione. Si domanda il centro di gravità del trapezio, per esempio ABCD (fig. 25.). A risolvere il problema, prima si dividano per metà in E ed F i lati paralleli AB, e CD, e si congiunga il punto E col punto F per la retta EF. Poscia

si tracci la diagonale BD, la quale divide il trapezio in due triangoli ABD, BCD; e si determinino i centri di gravità di questi triangoli. A tale scopo si dividano per metà in M ed N i lati AD, e BC dei medesimi triangoli; e si congiunga il punto B col punto M, il punto D col punto E, ed anche il punto B col punto F, il punto D col punto N. Il punto di intersezione H della BM colla DE sarà il centro di gravità del triangolo ABD; come pure il punto K, in cui s'interseca la BF colla DN, sarà (1°) il centro di gravità dell'altro triangolo BCD. Congiungansi ora questi due centri di gravità H e K per la retta HK. Dico che il centro di gravità dell'intero trapezio ABCD sta nel punto G d'intersezione di questa HK colla retta EF, che divide a metà i lati paralleli del trapezio medesimo.

Dimostrazione. La retta EF divide per metà tutti gli elementi del trapezio paralleli ai due lati AB, CD: perchè vigono anche qui le proporzioni che furono stabilite pel triangolo nel problema antecedente. Dunque il centro di gravità del trapezio deve ritrovarsi in qualche punto della EF. Inoltre i due centri di gravità H, e K, dei due triangoli (componenti il trapezio medesimo), si possono considerare come due forze parallele; o meglio, come i punti di applicazione delle due forze parallele di gravità, dalle quali sono sollecitati i due triangoli pesanti ABD, BCD. Ma il punto di applicazione della risultante di due forze parallele sta in un punto della retta, che congiunge i punti di applicazione di essa forza; e di più il centro di gravità del trapezio non è che il punto d'applicazione della risultante di tutte le forze, che stimolano i singoli punti pesanti di esso. Dunque il centro di gravità di esso trapezio deve stare in un punto anche della HK. Per conseguenza starà nel punto G d'intersezione fra questa HK e la sopraddetta EF.

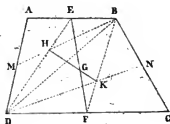



Fig. 25.

3°. *Determinare il centro di gravità di un quadrilatero.*

Risoluzione. Si divida il quadrilatero in due triangoli per mezzo di una diagonale, e quindi si determinino come sopra i centri di gravità di questi triangoli. Dopo ciò, si congiungano con una retta questi due centri di gravità, e la retta medesima si divida in parti inversamente proporzionali alle aree dei detti triangoli. In questo punto di divisione starà il centro di gravità dell'intero quadrilatero.

Dimostrazione. Diviso il quadrilatero in due triangoli, certamente i due centri di gravità di questi sono i punti di applicazione delle risultanti dei pesi di tutti gli elementi loro; ed il centro di gravità dell'intero quadrilatero rimarrà in un punto della retta, che riunisce questi due centri medesimi. Ma quale sarà questo punto? Ricordiamoci (**s.** II. 3°) che il centro di gravità è il punto di applicazione della risultante di tutte le forze di gravità applicate ai singoli punti del grave; e che di più (**s.** I. 2°) questo punto divide la retta (che congiunge i due punti parziali di applicazione delle due risultanti dei due gruppi, nei quali furono divise tutte le forze parallele) in parti inversamente proporzionali a queste risultanti medesime. Riflettiamo inoltre che i due triangoli, essendo perfettamente omogenei fra loro, avranno pesi perfettamente proporzionali alle loro aree. E con ciò ci sarà manifesta la legittimità della soluzione del problema.

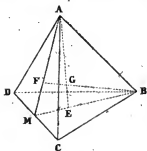



Fig. 26.

4° *Trovare il centro di gravità di una piramide triangolare.*

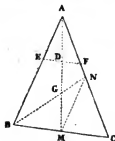
Risoluzione. Sia la piramide ABCD (fig. 26.) a base triangolare BCD. Affine di trovarne il centro di gravità, si principia dal determinare il centro di gravità E di questa base medesima, e poi quello F di una faccia qualunque ACD, che dev' essere parimente triangolare. Poscia si congiunge, per la retta AE, il vertice A della piramide col centro E di gravità della base; e, per la retta BF, l'altro centro F di

gravità della faccia col vertice B dell'angolo opposto. Il centro di gravità della piramide starà nel punto G, in cui queste due rette AE, BF si tagliano a vicenda.

Dimostrazione. Primieramente le due rette AE, BF si incontrano in un punto. Imperocchè esse evidentemente giacciono nello stesso piano, determinato dalle due rette ad angolo AMB: e sono inoltre convergenti; perchè, se è minore di due retti la somma di MAB con MBA, lo sarà vie maggiormente la somma dei due angoli GAB, GBA, contenuti dentro quei primi. In secondo luogo nel loro punto d'incontro si ritrova il centro di gravità della piramide. Dappoichè divisa la piramide in tanti elementi triangolari paralleli alla base BCD, questi riusciranno tutti simili; e la retta AE, che congiunge il vertice A col centro di gravità di BCD, passa per i centri di tutti i detti triangoli. Al modo medesimo la retta BF, che congiunge l'angolo B col centro di gravità della faccia ACD, passa per i centri di gravità di tutti gli elementi triangolari, paralleli alla faccia medesima. E per conseguenza il centro di gravità della piramide manifestamente starà (II. 3°) nell'incrocicchiamento G di queste due rette.

Fig. 27.

IV. TEOREMI. 1° *Il centro di gravità del triangolo si ritrova a due terzi della retta, che, partendo dal vertice di uno degli angoli, va alla metà del lato opposto.*

Dimostrazione. Nel triangolo ABC (fig. 27.) si dividano in M ed N per metà i lati BC, ed AC; e si conducano le rette AM e BN, le quali si incrocicchiano in G; e finalmente per mezzo della MN, si congiunga il punto M col punto N. Poichè questa MN divide per metà tanto la AC come la BC, potremo dire che AC : BC :: CN : CN, e però AB ed MN sono parallele fra loro. Per la qual cosa saranno simili i due triangoli AGB, MGN, e si avrà la proporzione AG : GM :: AB : MN. Ma AB : MN :: BC : CN :: 2 : 1. Dunque AG : GM :: 2 : 1. Ond'è, che anche AG : AG + GM :: 2 : 2 + 1; o, ciò che è lo

stesso AG : AM :: 2 : 3. E finalmente, chiamando h la retta AM, ed x la sua porzione AG, sarà

$$x = \frac{2}{3} \times h.$$

2° *Il centro di gravità di un trapezio* [1] *sta sulla retta che*

[1] Allo stesso risultato si giunge colla teoria dei momenti. Vediamolo. Il trapezio (fig. 28.) sia rappresentato da ABCD, e si divida, per la diagonale BD, in due triangoli ABD, e CBD. Quindi, congiunti (per mezzo delle rette DE e BF) i vertici D e B di questi triangoli coi punti medii E ed F delle loro basi AB e CD, si determinino su quelle (DE, BF) a due terzi dai detti vertici, vale a dire in H e K, i due centri di gravità dei detti triangoli. E finalmente si conducano alle basi medesime tre perpendicolari; una delle quali, cioè MN, passi per H; l'altra, ossia RS, passi per K; e la terza, XY, passi per G, ove la retta congiungente H con K trapassa per la diagonale BD, che è quanto dire pel centro di

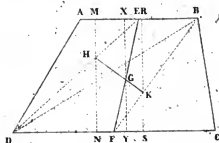



Fig. 28.

gravità del trapezio. Tutte le forze parallele di gravità sollecitanti il trapezio possono scompartirsi in due gruppi, uno dei quali contenga tutte quelle del triangolo ABD, e l'altro quelle del triangolo BCD. Ciò fatto, e composte insieme tutte quelle di ciascun gruppo, apparirà chiaro che la risultante delle forze di ABC, cui chiameremo p, riuscirà applicata in H; e che quella delle forze di BCD, cui diremo q, verrà applicata in K. È poi manifesto, che la risultante di queste due p e q, la quale esprimeremo con r, avrà in G il suo punto d'applicazione. Per la qual cosa, riferiti questi tre punti d'applicazione al lato AB, (preso per asse dei momenti) dal quale il punto H rimane distante di tutta la HM, K ne dista di tutta la KR, e G si trova lontano della quantità incognita GX, cui rappresenteremo con x; potremo asserire, che

$$r \times x = p \times \text{HM} + q \times \text{KR}.$$

Il che equivale a dire, che il momento della risultante è uguale alla somma dei momenti delle componenti.

Si domanda ora il valore della x. È noto, che per conoscere questo, bisogna che sien cognite le quantità r, p, q, HM, e KR. Vediamo di determinarle.

ne taglia a metà le basi, e ad una distanza (da una di queste) uguale al quoto che nasce col dividere per la somma loro la somma dei due prodotti, che si ottengono moltiplicando la terza parte della medesima retta, prima col doppio della sopraddetta base, poi coll'altra.

Ed in prima quanto ad r, p, e q ricordiamoci che il centro di gravità è il punto d'applicazione della risultante di tutte le forze parallele ed uguali, costituite dal peso dei singoli punti materiali di un corpo; e, nel caso nostro, del trapezio, o dei due triangoli, nei quali quello è diviso. Prendendo quindi per unità la forza di gravità di un punto materiale, la somma di tutte le dette forze sarà uguale all'area della figura, di cui si tratta. Ma a tal somma è uguale anche la risultante delle forze parallele e cospiranti. Dunque la risultante generale r sarà uguale all'area del trapezio, che è data dal prodotto della sua altezza per la semisomma dei due lati paralleli; e ciascuna delle risultanti parziali p e q uguaglierà l'area del rispettivo triangolo, vale a dire il semiprodotto della sua altezza per la base. Quindi è che, indicando rispettivamente per a e b le due basi AB e CD, e per k l'altezza $MN = XY = RS$ del trapezio e dei triangoli, avremo

$$r = k\frac{(a+b)}{2};\ p = \frac{ak}{2};\ q = \frac{bk}{2}.$$

Quanto poi alle distanze HM, e KR, si avverta che queste sono proporzionali rispettivamente, com'è manifestissimo, ad EH e BK; e che però come $EH = \frac{1}{3}.DE$, e $BK = \frac{2}{3}.BF$, così

$$HM = \frac{1}{3}.MN = \frac{1}{3}.k;\ KR = \frac{2}{3}.RS = \frac{2}{3}.k.$$

Sostituendo pertanto tutti questi ritrovati valori nella superiore equazione $r \times x = p \times HM + q \times KR$, essa medesima si tradurrà nella seguente $k.\frac{(a+b)}{2}.x = \frac{ak}{2} \times \frac{1}{3}.k + \frac{bk}{2} \times \frac{2}{3}.k$; o, ciò che è lo stesso, potrà dirsi $\frac{k}{2}(a+b)x = \frac{k}{3}(a+2b)\frac{k}{2}$; donde finalmente trarremo

$$x = \frac{k}{3} \times \frac{(a+2b)}{(a+b)}.$$

Formola simil issima a quella che poniamo nel testo; nella quale per altro al valore di h è sostituito il valore di k: perchè, in questa, x rappresenta la *distanza* del centro di gravità dalla AB; nella superiore, x è la *porzione della retta* EF (biseccante le basi) intercetta fra il centro di gravità G e la base AB.

Dichiarazione. Si chiamino rispettivamente a e b le basi AB, CD (fig. 29); e si rappresenti per h la retta EF, che divide per metà i lati medesimi. Dico, che il centro di gravità del trapezio sta su questa retta EF, e precisamente nel punto G; a tale distanza GE, cui esprimeremo per x, dal lato AB, che sussista l'equazione

$$x = \frac{h}{3}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right).$$

Dimostrazione. A dimostrarlo, principio dall'avvertire che i punti H e K, centri di gravità dei rispettivi triangoli ADB, BCD, stanno (secondo il teorema antecedente) a due terzi delle rette DE, BE. Poi conduco, dagli stessi centri H e K, due rette HM e KN parallele ai lati AB e CD: con che nascono due triangoli HMG, KNG evidentemente simili. Potremo quindi asserire, che

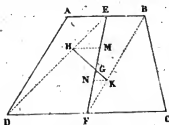



Fig. 29.

$$KN : HM :: GN : GM.$$

Cerco i valori di KN e di HM. A tale intento convien notare che i triangoli FBE, ed FKN sono simili fra loro; come sono pur simili gli altri due EDF, EHM. Quindi le due proporzioni BE : KN :: BF : FK; e DF : HM :: DE : HE. Ma sappiamo che BF : FK :: 3 : 1, e che DE : HE :: 3 : 1. Dunque la prima delle ultime due proporzioni ci dà BE : KN :: 3 : 1, e la seconda DF : HM :: 3 : 1. Donde $KN = \frac{BE}{3}$; ed $HM = \frac{DF}{3}$. Ma $BE = \frac{AB}{2}$; $DF = \frac{CD}{2}$. Però, avendo chiamato a la AB, e b la CD, diremo $KN = \frac{a}{2 \times 3}$, ed $HM = \frac{b}{2 \times 3}$. Per la qual cosa la proporzione superiormente stabilita si

convertirà in quest'altra $\frac{a}{6}$: $\frac{b}{6}$ :: GN : GM. E poichè la EF fu chiamata h, ed x fu detta la sua porzione GE, sarà anche $a : b :: h - x - NF : x - EM$. Ma FN : FE :: FK : FB :: 1 : 3; e però FN : h :: 1:3, ed FN $= \frac{h}{3}$. Similmente potremo dire: EM : EF :: EH : ED = 1 : 3 ; e però EM : h :: 1 : 3, ed EM $= \frac{h}{3}$. Dunque, sostituendo, $a:b :: h - x - \frac{h}{3} : x - \frac{h}{3}$; e, riducendo allo stesso denominatore, otterremo la proporzione $a : b :: 3h - 3x - h : 3x - h :: 2h - 3x : 3x - h$. La quale, ove si faccia il prodotto degli estremi e dei medii, darà $3\,ax - ah = 2bh - 3bx$. Quindi $3ax + 3bx = ah + 2bh$; $3(a+b) = h(a+2b)$; e finalmente

$$x = \frac{h}{3}\left(\frac{a+2b}{a+b}\right).$$

3° *Nella piramide a base triangolare, il centro di gravità si ritrova sulla retta, che congiunge il vertice della medesima col centro di gravità della base, e precisamente in un punto, che dista dal vertice stesso di una quantità uguale a tre quarti della lunghezza della sopraddetta retta.*

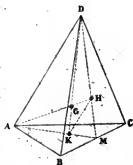



Fig. 30.

Dimostrazione. Se i due centri di gravità H e K (fig. 30.), delle due faccie BCD, ABC della piramide, vengano congiunti colla retta HK, si vede manifestamente sussistere la proporzione AM : DM :: KM : HM. Ond'è che la HK è parallela alla AD. Quindi i due triangoli GHK ed AGD sono simili: e però DG : GK :: AD : HK. Ma AD : HK :: AM : KM :: 3 : 1. Dunque DG : GK :: 3 : 1; ed anche DG : DG + GK :: 3 : 3 + 1. E, chiamando x la DG, ed h la DK = DG + GK, avremo la

proporzione $x : h :: 3 : 4$; donde finalmente inferiremo che

$$x = \frac{3}{4} . h.$$

V. COROLLARII. 1° Il centro di gravità nel circolo, nel parallelogrammo, nella sfera, nel cilindro (fig. 31.), e nel parallelepipedo è il centro stesso di figura.

2° Il centro di gravità del cono (fig. 33.) sta nel suo asse, e precisamente in un punto, che dista dal vertice di tre quarti di tutta la lunghezza dell'asse medesimo.

3° Per determinare il centro di gravità di un poligono qualunque ABCDI (fig. 32.) si principia dal dividere il poligono in tanti triangoli ABC, ACD, ADI, quanti sono i

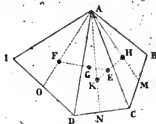
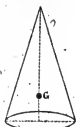



Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33.

suoi lati meno due. Dopo ciò si trovano i centri di gravità H, K, F, di tutti questi triangoli; e, congiunti i centri di gravità di due triangoli adiacenti ABC, ACD per mezzo di una retta HK, si divide questa in parti inversamente proporzionali alle aree dei due triangoli: con che si trova il centro di gravità E del quadrilatero ABCD. Quindi si congiunge questo centro di gravità con quello del terzo triangolo ADI, per la retta EF; la quale parimenti si divide in parti inversamente proporzionali alle aree del quadrilatero ABCD, e del triangolo ADI. E così via dicendo. Il punto, che si determina col dividere la retta (congiungente il centro di gravità dell'ultimo triangolo con quello del poligono residuo) in parti inversamente proporzionali alle aree, delle quali essa congiunge i centri, sarà il centro di gravità richiesto.

4° In un poliedro qualunque il centro di gravità verrà determinato nel seguente modo. Si concepirà il poliedro diviso in tante piramidi triangolari, quanti sono i lati della sua base, meno due. Si ritroverà quindi il centro di gravità delle singole piramidi; e si comporranno insieme prima due di questi centri, poi il centro di due piramidi adiacenti con quello della terza, e così di sèguito.

11. Equilibrio di un grave sospeso. —

I. DEFINIZIONI. 1ª Si dice *sospeso* un grave sostenuto da un filo flessibile attaccato ad un punto fisso, o ad un filo inflessibile e mobile intorno al punto fisso.

2ª Il punto fisso, a cui è raccomandato questo filo, vien chiamato *punto di sospensione*.

II. PROPOSIZIONE. *Affinchè un grave sospeso sia in equilibrio, è necessario che la linea di direzione passi pel punto di sospensione.*

Dimostrazione. È noto che, a tenere in equilibrio un grave, bisogna applicare al suo centro di gravità una forza uguale e contraria al peso suo. Ma questa forza può anche applicarsi (**7**. III. 3°) ad un altro punto diverso, *a condizione* per altro, che questo diverso punto stia nella direzione della sopraddetta forza uguale e direttamente opposta al peso. Ora questa condizione è soddisfatta nel solo caso, in cui la linea di direzione passa pel punto di sospensione. Per maggior chiarezza, M (fig. 34.) rappresenti il grave sospeso, pel filo flessibile FM, al punto fisso F; GR ne rappresenti il peso, e G ne sia il centro di gravità. Sarà DR la linea di direzione. Quindi a mettere in equilibrio M, è necessario che una forza uguale e contraria a GR, venga applicata o nel punto G, o in qualunque altro punto della DR, il quale per altro sia invariabilmente congiunto con G. Dunque se il punto di sospensione si troverà nella retta DR, certamente ne nascerà equilibrio. Imperocchè il peso non potrebbe in questo caso avere altro effetto, che o di strappare il filo, o di smuovere il punto fisso. Invece il filo si suppone qui di una tenacità invincibile, e il punto fisso si considera come assolutamente immobile. Ma poniamo che il punto fisso si ritro-

D F M G R

Fig. 34.

vi fuori della DR (fig. 35.), e per dire una cosa, in F. Allora, decomposta la GR in due altre forze, una GP perpendicolare alla linea del filo, l'altra GQ diretta secondo questa linea medesima; è manifesto, che tutta la GQ resterebbe elisa dalla tenacità del filo, e dalla fissezza del punto immobile, e la GP farebbe piegare il filo. Perciò, essendo questo flessibile, o inflessibile e mobile intorno ad F, il corpo M si muoverebbe.

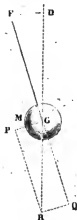
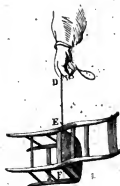



Fig. 35. Fig. 36. Fig. 37.

III. COROLLARII. 1° Dunque viceversa, posto che un corpo qualunque appeso ad un filo flessibile sia in equilibrio, il suo centro di gravità si troverà in quella retta (fra le linee parallele, che rappresentano in un sito medesimo le direzioni della gravità), che passa pel punto di sospensione.

2° Dunque il filo a piombo segna la direzione della gravità. Questa conclusione è appunto una delle due cose, le quali nella Parte Prima (14. II. 6°) promettemmo di dimostrare nella presente Parte matematica.

3° Dunque si può determinare il centro di gravità anche per esperienza. A tale intendimento si sospende pel punto B (fig. 36.) il corpo (di cui si domanda il centro di gravità) per mezzo di un filo flessibile AB, e si determina la retta AC se-

gnata dal filo, la quale è certamente la linea di direzione; e che però passa pel centro di gravità. Poscia il corpo medesimo si sospende per un altro suo punto E (fig. 37.), e parimente si determina la linea di direzione DF, che avrà certamente nel grave una giacitura differente dalla linea di direzione prima determinata; ma nella quale si ritroverà pur tuttavia il centro di gravità del medesimo. Questo starà (come è manifesto) nel punto, in cui le due sopraddette rette s'incrocicchiano.

12. Equilibrio di un grave sorretto. —

I. DEFINIZIONI. 1ª Si denomina *sorretto* un corpo, il quale poggia sopra un piano.

2ª Il punto fisico, col quale il grave tocca il piano, si chiama *base*.

3ª Se il grave tocca il piano con più punti, viene denominato *base* il poligono che si determina col congiungere, per mezzo di tante linee rette, tutti i punti estremi, coi quali il grave medesimo tocca il piano.

II. PROPOSIZIONI. 1ª *Un grave posato sopra un piano inclinato all'orizzonte, non è in equilibrio.*

Dimostrazione. Se il grave fosse legato in qualche maniera sul piano, non sarebbe necessario per l'equilibrio, che questo piano fosse esattamente orizzontale. Perchè il piano stesso ne impedirebbe la caduta verticale, e il legamento si opporrebbe allo scorrimento del corpo lungo il piano medesimo. Non così però, quando il grave sia abbandonato a sè stesso; e perciò si trovi libero da qualsivoglia rattento, che possa essergli posto, quando non fosse altro, dall'attrito. Imperocchè la forza di gravità, per esempio GR (fig. 38.), colla quale il grave MN, posato sul piano inclinato ABC, tende a cadere, può concepirsi decomposta in due, cioè in GP perpendicolare al piano AB, ed in GQ parallela al piano medesimo. La prima, per la quale il grave è spinto ad internarsi nel piano, resta elisa

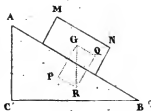



Fig. 38.

dalla resistenza d'impenetrabilità del medesimo: ma la seconda, per la quale è costretto a scorrere giù pel piano, non incontra opposizione veruna. E però quest'ultima rimane viva, e il corpo non è in equilibrio.

2ª *Affinchè un grave, posato sopra un piano orizzontale, sia in equilibrio, è necessario che la linea di direzione passi per la sua base.*

Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

Dimostrazione. I. Facciamo primieramente il caso che la base del corpo sia un solo punto B (fig. 39.), e che per esso non passi la linea di direzione. La forza di gravità GR potrà sempre decomporsi in due altre forze, delle quali l'una, diretta verso la base, sarà elisa dal piano; l'altra non avrà veruna opposizione, e spingerà il corpo a cadere. II. Parimente, se il grave poggia sul piano con due soli punti (fig. 40.), oppure con una retta e per questa retta (che ne sarà la base) non passi la linea GR di direzione, potrà ugualmente la sua gravità GR scomporsi in due GA, GB, delle quali la GB passando per la base, non produrrà altro effetto, che premere il piano; ma l'altra GA rovescierà il grave. III. Si dica lo stesso nel caso, che il corpo (fig. 41.) tocchi il piano con tre o più punti: fra i quali per altro non trapassi la linea di direzione. Il suo peso GR verrà solo in parte sostenuto dal piano; la qual parte sarà precisamente quella, che può essere rappresentata dalla componente GB passante per la base: e perciò, per l'altra parte GA del peso, il corpo ribalterà.

III. COROLLARII. 1° Dunque un corpo perfettamente libero, e posato sopra un piano obliquo, non è mai in equilibrio. Dacchè o la linea di direzione passi per la sua base, o non

vi passi affatto, una sola porzione, cioè una sola delle due componenti, della gravità verrà elisa dal piano.

2° Dunque un corpo sorretto da un piano orizzontale potrà essere o non essere in equilibrio. Imperocchè, se la linea di direzione passerà per la sua base, rimarrà fermo; se no cadrà.

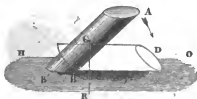



Fig. 42.

3° Dunque un corpo, posato sopra un piano obliquo ed impedito (esempigrazia dall'attrito) a scorrere per questo, potrà esso pure essere o no in equilibrio. Poichè ò la linea di direzione passerà per la sua base (ciò che in una palla, in tal caso, certamente non avviene) ed il corpo resterà in quiete; oppure non vi passerà, ed il grave dovrà inevitabilmente cadere.

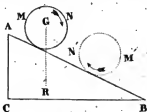
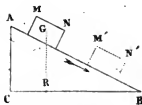



Fig. 43. Fig. 44.

IV. scolii. 1° Per maggior dilucidazione delle teorie stabilite si noti, che la mancanza d'equilibrio non produce sempre un movimento continuo, ma talora fa solamente che il corpo cada. Un grave (fig. 42.) di qualsivoglia forma G posato sopra un piano orizzontale HO, in guisa che la linea di direzione GR non passi per la sua base BB', certamente si rovescia in BD. Una palla (fig. 43.), sorretta da un piano AB inclinato all'orizzonte CB, rotola giù pel piano. Finalmente (fig. 44.) un cubo MN, o un corpo di qualunque altra figura

a larga base, sostenuto sopra un piano parimente obliquo, ove non abbia rattento di sorta, striscia lunghesso il piano: ove poi (fig. 45.) sia trattenuto, almeno dall' attrito, allora o la linea di direzione GR passa per la sua base, e sta fermo; o non vi passa (essendo G'R'), e ribalta.

Fig. 45.

2° Per mezzo delle dottrine sopra esposte si rende ragione di un gran numero di fenomeni meccanici, che a prima giunta recano grande sorpresa; e dei quali sarà pur bene proporre qualche esempio qui appresso. Si fanno delle bambole (fig. 46.),

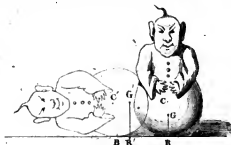



Fig. 46.

le quali quantunque volte si atterrano altrettante si rizzan da sè. Ciò avviene perchè esse finiscono in un emisfero, ed ànno il loro centro di gravità (G) tanto verso il basso, che, quando sono colche, la linea di direzione (G'R') passa fuori del punto (B) di contatto col piano che le sorregge, ossia fuori della

base. Quindi la caduta del centro di gravità le fa rizzare; e allora appunto passa per la base la linea di direzione (G R).

3° Un doppio cono (MN) posato (fig. 47.) sopra due regoli (AC, BC) ad angolo (C) e saglienti verso la base (AB) dell'angolo, da

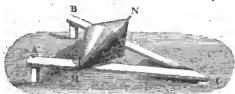



Fig. 47.

sè medesimo si ravvolge e sale verso la detta base. Ma questo è un salire solo apparente; dappoichè, quando il doppio cono (fig. 48.) poggia sul vertice (C) dell'angolo formato dai due regoli, è la sua parte più grossa (PQ), cioè la base comune dei due coni, che tocca il piano inclinato. Quando invece il doppio cono è alla base (AB) dell'angolo medesimo, allora (fig. 47.) tocca il piano inclinato colle punte (M,N) cioè coi vertici dei due coni. Ond'è che, ove (fig. 48.) la sollevazione (AK) del piano sia più breve del raggio (O P) della base dei due coni, il centro di gravità discenderà (da C in A), comechè sembri salire.

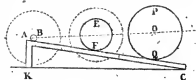



Fig. 48.

4° Una palla (fig. 49.) salisce realmente per un piano inclinato (ABD): purchè essa abbia il centro di gravità collocato in un lato (G), ed essa medesima sia posata dapprima sul piano in guisa, che la massa pesante, in mezzo a cui il detto centro si ritrova, (cadendo in G, G′, G″) trascini la palla ad ascendere (per C, C′, C″).

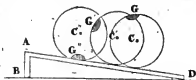



Fig. 49.

13. Stabilità ed instabilità dell'equilibrio. — I. DEFINIZIONI. 1° *Stabile* si dice l'equilibrio (fig. 50.) d'un corpo (A), il quale ove sia alquanto smosso, torna a fermarsi da sè.

2° *Instabile* è l'epiteto che si dà all'equilibrio, che dura, purchè il grave (B) non riceva il menomo urto.

3° *Indifferente* o *neutro* è chiamato l'equilibrio, il quale persevera in tutte le posizioni che può prendere il corpo (C).

II. SCOLII. 1° Per giudicare della stabilità dell'equilibrio di un grave sorretto, o sospeso vi sono regole sicure. I. Ove il centro di gravità (fig. 51.) nelle diverse posizioni (AB, A'B',....) che può prendere il corpo, nel caso che sia smosso, non sarà nè alzato nè abbassato, si manterrà cioè sulla stessa linea

Fig. 50.

orizzontale, l'equilibrio sarà indifferente. II. Quando all'incontro (fig. 52.) la posizione (ABDE) di un corpo è tale che il suo centro di gravità (C) è più alto che in qualunque altra posizione (A'B'DE') vicina, l'equilibrio non può essere che instabile. Perchè ogni spostamento abbasserà in (C') il detto centro, e la gravità, tendendo ad abbassarlo davvantaggio, farà cadere il grave. III. Ogni volta finalmente che un corpo (fig. 53.) è in tal posizione (MNPQ) che il suo centro di gravità (O) è più basso di quello, che possa essere in ogni altra posizione (M'N'P'Q) vicina; il suo equilibrio è stabile. Imperocchè, se in tal caso il grave è smosso, il suo centro di gravità non può essere che rialzato (in O'); e poichè la gravità tende ad abbassarlo, essa medesima lo riporterà, dopo una

serie di oscillazioni, nella sua primiera posizione: e l'equilibrio sarà ristabilito.

2° La durevolezza dell' equilibrio stabile di un grave sorretto dipende da più cagioni. I. È cagione di maggiore durevolezza di equilibrio il passare della linea di direzione pel *mezzo* della base. Perchè se la linea di direzione cada sull'estremità della base, è manifesto che essa al più piccolo urto uscirà fuori della base medesima. II. Un'altra cagione è l'*ampiezza* della base. Dacchè, se questa è ristretta, ad ogni leggiera rotazione od obliquità che possa essere indotta nel grave, la linea di direzione sarà portata fuori della base stessa. III. Una terza cagione di durevolezza nell'equilibrio è la *bassezza* del centro di gravità. Imperciocchè, per le oscillazioni, o ro-

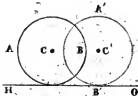
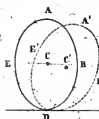
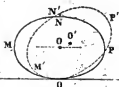



Fig. 51. Fig. 52. Fig. 53.

tazioni, che conseguitano ogni urto impresso ad un corpo, i punti più alti scorrono per una più estesa linea: e perciò più il centro di gravità rimarrà in alto, e più in tali movimenti, si sposterà esso medesimo, e con lui la linea di direzione; la quale allora facilmente sarà tratta fuor della base.

III. COROLLARII. 1° L'equilibrio di una palla, o di un cilindro posato per lungo, sopra un piano orizzontale è indifferente. Questo certamente non potrebbe dirsi ove i corpi, che ànno tali figure, non fossero omogenei; oppure tenessero artificialmente infissa, in qualche parte fuori del centro, una massa più pesante. Infatti l'equilibrio di quella sfera, che dicemmo (12. IV. 2°) dover salire per un piano inclinato è instabile: è stabile invece l'equilibrio della sfera in cui terminano (12. IV. 4°) quelle statuette che si rizzan da sè. Ma quando il centro di figura coincide (come d'ordinario)

col centro di gravità, questo nei detti corpi nè s' alza nè si abbassa col muoverli; e però il loro equilibrio è indifferente.

2° L'equilibrio di un uovo, posato su di un piano orizzontale in maniera che il suo asse maggiore sia parimente orizzontale, nella direzione della sua sezione circolare, è indifferente: nella direzione della sua sezione quasi ellittica, è stabile. Ma è instabile, se l'uovo sia posato in modo che l' asse maggiore rimanga verticale. Perchè ogni urto, nelle dette direzioni, nel primo caso lascia il centro di gravità alla sua altezza; nel secondo lo solleva; nel terzo lo deprime.

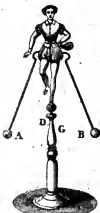



Fig. 54. Fig.55. Fig.56. Fig.57.

3° È instabile l'equilibrio di un bastone sostenuto verticalmente da un dito sottoposto ad una sua estremità; e quello (fig. 55.) di un bicchiere (V) posato colla parte esterna del fondo, sopra una punta (B). Ma è stabile l'equilibrio del bicchiere medesimo (fig. 54.) capovolto (V) e posato per la faccia interna del suo fondo sulla punta medesima (B). Come parimente è stabile l'equilibrio di una palla (fig. 56.) posata sopra una punta: a condizione che questa palla medesima, oppure una statuetta leggiera saldatavi sopra, sia rigidamente congiunta con due appendici (A, B) pesanti: e così il centro di gravità venga a ritrovarsi sotto la punta (per esempio in G).

4° Un corpo inflessibile e mobile intorno a un punto (fig. 58.) gode dell'equilibrio stabile, se il punto (F), intorno a cui può girare, sta sopra al suo centro (G) di gravità: e questo è il

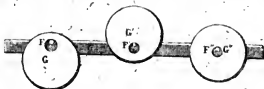



Fig. 58.

caso del pendolo da orologio. È in equilibrio instabile, se viceversa il punto (F'), intorno a cui è mobile, sta sotto al centro medesimo (G'). Esso medesimo si trova finalmente in equilibrio indifferente, se il punto (F''), intorno a cui è girevole, coincide col centro (G'') di gravità.

Fig. 59.

5° Se poi il grave (fig. 57.) sia mobile intorno a due punti (A, B), come sopra due perni; quando il suo centro (G) di gravità sta sopra ai detti due punti, o all'asse (AB) di rotazione, è in equilibrio instabile: quando invece il centro stesso è disceso sotto quest'asse, il suo equilibrio diviene stabile.

14. Leva. — Coi principii stabiliti è cosa agevole spiegare l'utilità delle macchine semplici; fra le quali sono principalissime la leva, e il piano inclinato.

I. definizioni. 1ª Si denomina *leva* (fig. 59.) un'asta, retta o no, (AB) inflessibile e mobile intorno a un punto fisso (F).

2ª Questo punto fisso (F) è chiamato *fulcro* od *ipomoclio*.

3ª Per la leva si trasmette l'azione di una forza ($AP=p$), che dicesi *potenza*, sopra un'altra forza antagonista ($BR=r$), la quale chiamasi *resistenza*.

4ª Se il fulcro (F) sta fra il punto di applicazione (A) della potenza, e quello (B) della resistenza, la leva vien detta *di primo genere*, oppure *interfissa*.

5ª Si dice di *secondo genere*, ed anche *interresistente* (fig. 60.) se il punto (B) d'applicazione della resistenza rimane fra il fulcro (F), e il punto (A) d'applicazione della potenza.

6ª È chiamata leva di *terzo genere*, o *interpotente*, quella (fig. 61.) in cui la potenza è applicata in un punto (A) frapposto al fulcro (F) ed al punto (B) d'applicazione della resistenza.

7ª Si appellano *bracci di leva*, (fig. 59, 60, 61.) le parti della leva (AF, BF) comprese fra il fulcro (F) e i punti d'ap-

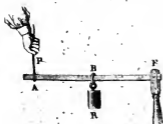



Fig. 60.

Fig. 61.

plicazione (A, B) delle forze. Ma più propriamente e teoricamente *bracci di leva* significano (fig. 62.) le perpendicolari (FM, FN) condotte dal fulcro alle direzioni (AP, BR) delle forze.

8ª *Braccio della potenza* è la perpendicolare (FM), che dal fulcro va alla direzione della potenza: quella poi (FN), che dal fulcro stesso va alla direzione della resistenza, è il *braccio della resistenza*.

9ª Il prodotto di ciascuna forza (p o r) pel proprio braccio di leva (cioè $p \times FM$, oppure $q \times FN$), è stato denominato *momento statico*.

10ª Riceve il nome di *momento meccanico* il prodotto ($p \times AM$, $q \times BN$), che si ottiene (fig. 63.) moltiplicando ciascuna forza (p, e q) per l'archetto (AM, o BN) percorso dal suo punto d'applicazione nel primo istante di turbato equilibrio.

II. PROPOSIZIONI. 1ª *In una leva non può aversi equilibrio, se non nel caso che i momenti sieno uguali.*

Dimostrazione. Divideremo la prova della tesi in tre parti: considerando nella prima i *momenti statici teorici*; nella seconda i *momenti statici pratici*, cioè quelli che ànno a fat-

tori le porzioni o i bracci materiali della leva; nella terza i *momenti meccanici*. I. Ad equilibrare due forze, applicate a due diversi punti di una verga rigida, senza aver riguardo alla energia loro assoluta; è necessario render fisso il punto della verga stessa, pel quale trapassa la risultante loro. Ma, come sappiamo, la risultante di due forze, vuoi oblique (7. IV. 2°) vuoi parallele (8. I. 2°), trapassa la direzione della retta, che ne congiunge i punti d'applicazione, in un punto tale, che le perpen-

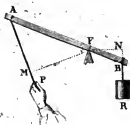
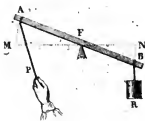



Fig. 62. Fig. 63.

dicolari, da questo mandate sulle direzioni delle componenti, riescono inversamente proporzionali alle forze medesime. Il che equivale a dire, che sono uguali i prodotti, i quali s'ottengono moltiplicando ciascuna forza per la perpendicolare mandata ad essa dal punto, per cui trapassa la risultante. Ove dunque questo punto sia fisso, oppure, in altri termini; in questo punto si ritrovi il fulcro, le forze produrranno l'equilibrio, e i due prodotti saranno i momenti statici. Dunque l'equilibrio della leva esige l'uguaglianza dei momenti statici. II. La stessa cosa è vera ancora quando, nel caso della leva retta, e delle forze parallele, per fattori dei momenti si assumono i bracci materiali della leva, cioè le distanze del fulcro dai punti d'applicazione delle forze medesime. Infatti in tal caso le perpendicolari FM, FN (fig. 63.), mandate dal fulcro F alle direzioni AP, BR delle forze, sono direttamente proporzionali (8. I. 2°) alle porzioni AF, BF della leva poste fra il fulcro F, e i punti d'applicazioni delle stesse forze. E però, come le forze (in caso d'equilibrio) sono inversamente proporzionali alle dette perpendicolari;

così lo saranno eziandio alle porzioni della leva, e l'equilibrio per conseguenza si legherà necessariamente alla condizione dell'eguaglianza dei prodotti di ciascuna forza pel proprio braccio di leva, ossia per la distanza del proprio punto d'applicazione dal fulcro. III. L'uguaglianza dei momenti statici è inseparabile da quella dei momenti meccanici. Imperocchè gli angoli piccolissimi AFM, BFN (fig. 63.), e gli archetti AM, BN loro opposti, i quali sono percorsi dai punti d'applicazione delle forze nel primo istante di turbato equilibrio, stanno fra loro direttamente come le rispettive altezze MF, NF, o distanze di questi

Fig. 64.

archetti medesimi dal punto F per cui trapassa la risultante. Ma quando si tratta della leva e si suppone l'equilibrio (cioè che in questo punto F si trovi il fulcro) tali distanze sono i bracci della leva stessa, e stanno fra loro inversamente come le forze. Dunque queste forze stesse, nella leva equilibrata, sono in ragione inversa degli archetti percorsi dai loro punti d'applicazione nel primo istante di turbato equilibrio. Ond'è che dovranno nella medesima essere uguali i prodotti, che si ottengono col moltiplicare ciascuna forza per l'archetto da sè percorso; in breve saranno uguali i momenti meccanici.

2ª *Con un sistema di leve si ottiene l'equilibrio, quando la potenza stia alla resistenza in ragione inversa dei prodotti di tutti i rispettivi bracci delle medesime leve.*

Dimostrazione. Sieno tre leve AB, BC, CD (fig. 64.) aventi i loro rispettivi fulcri in F, F′, F″, e combinate in modo che alla prima AB, e precisamente in A, sia applicata la potenza P, di valore p; la seconda BC faccia da resistenza, cui chiameremo r', e supporremo applicata in B alla prima AB; e la terza leva CD costituisca la resistenza r'' appli–

cata in C, ed apposta alla seconda leva BC; e finalmente alla terza CD, e precisamente in D, si trovi applicata la resistenza R di valore r, ed operante parallelamente alla P. In questa maniera r', che è la resistenza immediata di p, sarà potenza riguardo ad r''; ed r'', che è la resistenza di r', sarà potenza rapporto ad r. Ora noi sappiamo come, nel caso delle forze parallele, l'equilibrio della terza leva CD deve esigere, che $r'' : r :: DF'' : CF''$; donde facilmente avremo $r = r'' \times \frac{CF''}{DF''}$. Ma r'' è resistenza per la seconda leva BC, e l'equilibrio di questa evidentemente importa che $r' : r'' :: CF' : BF'$; quindi $r'' = r' \times \frac{BF'}{CF'}$: e, sostituendo questo valore di r'' nell' antecedente equazione, sarà $r = r' \times \frac{BF'}{CF'} \times \frac{CF''}{DF''}$. Inoltre r' è resistenza per la prima potenza p, e però $p : r' :: BF : AF$. Per conseguenza $r' = p \times \frac{AF}{BF}$; e, sostituendo questo valore di r' nella precedente, avremo $r = p \times \frac{AF}{BF} \times \frac{BF'}{CF'} \times \frac{CF''}{DF''}$; ed anche $\frac{r}{p} = \frac{AF \times BF' \times CF''}{BF \times CF' \times DF''}$. Equazione che ci dà diritto a stabilire la proporzione

$$p : r :: BF \times CF' \times DF'' : AF \times BF' \times CF''.$$

Ove i fattori del secondo membro rappresentano i bracci materiali delle leve, quando potenza e resistenza operano parallelamente fra loro; ma, quando questo non è, rappresentano le perpendicolari mandate dai fulcri sulle direzioni delle forze. In ogni caso anche qui si vede abbastanza, che l'equilibrio dipende dall' uguaglianza dei momenti.

III. COROLLARII. 1° Dunque quanto si guadagna in forza, tanto si perde in tempo. Imperocchè, l'uguaglianza dei momenti meccanici suppone la proporzionalità inversa fra le forze e gli archetti percorsi dai loro punti d'applicazione nel primo istante

di turbato equilibrio. E però la potenza potrà equilibrare una resistenza tanto più grande, quanto sarà maggiore lo spazio cui essa percorre, in confronto a quello cui percorre contemporaneamente la resistenza. Poichè per altro una data forza impiega maggior tempo a percorrere uno spazio più esteso; così quanto è più grande la resistenza, che può essere mossa da una data potenza, tanto è anche più lungo il tempo, che questa dovrà impiegare a trasportare quella ad una certa distanza. Si è calcolato che ci vorrebbero più di 40 milioni di secoli a trasportar la Terra ad una distanza uguale alla grossezza di un capello, colla forza di un solo uomo. Del resto in teoria non vi è resistenza, che non possa muoversi per mezzo di una lunga leva. Quindi il famoso detto di Archimede «Da ubi consistam, caelum terramque movebo»

2° Dunque la leva *interfissa*, a cui si riferiscono le forbici e la stadera, può favorire o la potenza o la resistenza, o nessuna delle due. Dacchè il fulcro, stando fra le due forze, può essere o più vicino alla resistenza, o più dappresso alla potenza, o ad ugual distanza da ambedue.

3° Dunque la leva *interresistente*, come sono i remi, favorisce sempre la potenza. Dacchè è inevitabile che la resistenza, trovandosi fra il fulcro e la potenza, e però più vicino di questa al fulcro medesimo, sia favorita meno della potenza.

4° Dunque la leva *interpotente*, a cui si riportano le molle e i muscoli del corpo degli animali, è sempre a svantaggio della potenza. Dacchè essa è il rovescio dell'antecedente. Non manca per altro di utilità: giacchè, mentre la potenza appena si muove, la resistenza deve percorrere un grande spazio.

5° Dunque per l'equilibrio fra la potenza $P=p$, e la resistenza $R=r$, in una leva (fig.65.) di lunghezza $AB=l$, il fulcro dovrà stare ad una distanza $AF=x$, dal punto d'applicazione della P, uguale al quoto che si ottiene dividendo per la somma delle forze il prodotto della R colla lunghezza della leva. Chè il braccio della R sarà $BF=AB-AF=l-x$; e però, per l'uguaglianza dei momenti statici, $px=r(l-x)$ $=rl-rx$. Onde $px+rx=rl$, ed $x(p+r)=rl$: in fine

$$x=\frac{rl}{p+r}.$$

IV. SCOLII. 1° Nella ricerca delle condizioni dell'equilibrio in una leva si fa astrazione dal peso dell'asta 1, dalla resistenza dell'aria, e dall'attrito; ed inoltre si suppone che le forze stieno nel medesimo piano col fulcro.

2° Il ragguaglio fra il tempo e le forze, e la deduzione, che se ne deduce, che cioè *quanto si guadagna in forza, tanto si perde in tempo*, appartiene al così detto *principio* delle velocità virtuali. Essendo stato chiamato *velocità virtuale* lo spazio, che un mobile, il quale sta in quiete, percorrerebbe in un primo istante di turbato equilibrio; il detto principio consiste nel teorema dell'eguaglianza dei momenti meccanici, o nel seguente canone: *l' equilibrio fra due forze richiede che sieno uguali i prodotti, i quali si ottengono moltiplicando le energie delle forze per le loro velocità virtuali.*

1 Se venga dimandata la distanza del fulcro dal punto d' applicazione della potenza, nel caso si voglia calcolare anche il peso della leva medesima, potranno farsi le seguenti considerazioni. Si chiami l tutta la lunghezza AB (fig. 65.) della leva, ed x la distanza AF del fulcro dal punto d'applicazione della potenza p; sarà $l-x$ il braccio della resistenza r. Si rifletta che il centro di gravità della leva, cui supporremo simmetrica ed omogenea, sta nel punto O medio fra i suoi estremi A e B, e si chiami g il suo peso. È chiaro che, quante volte la potenza agirà in senso inverso al peso della leva, la resistenza non sarà unicamente r, ma $r+g$. Quindi il momento della potenza AF $\times$ p, sarà uguale alla somma dei momenti BF $\times$ r ed OF $\times\, g = (\text{AO}-\text{AF})\,g$ delle due resistenze. Ossia $p\times x = r\;(l-x) + g\,(\frac{1}{2}l - x)$; e però

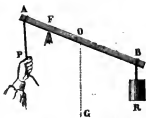



Fig. 65.

$p.\,x = rl - rx + \frac{gl}{2} - gx$; quindi ancora $px + rx + gx = rl + \frac{gl}{2}$, e $2.px + 2.rx + 2.gx = 2.rl + gl$; $2\,(p+r+g)\,x = 2.rl + gl$. E finalmente

$$x = \frac{2.\,rl + gl}{2\,(p+r+g)}.$$

15. Asse nella ruota. — I DEFINIZIONI. 1ª Vien detto *asse nella ruota* ed anche *tornio* (fig. 66.) un cilindro (AS) piantato perpendicolarmente nel centro di una ruota (GE), e girevole intorno ai due perni (A, S) nei quali termina, ed i quali sono appoggiati a due sostegni immobili (H, K).

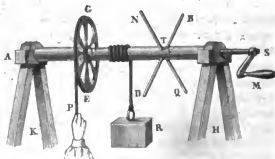



Fig. 66.

2ª Se manca la ruota, ed invece all'asse del cilindro (AS) è connesso un manubrio (M), la macchina prende il nome di *verricello*.

3ª Possono anche alla ruota stessa sostituirsi delle manovelle (BF, DF, NF,..) infisse nel cilindro perpendicolarmente all'asse di questo. In tal caso si denomina *burbera*.

4ª Se poi il cilindro della burbera invece di essere orizzontale, è (fig. 67.) verticale, allora si à ciò che chiamasi *argano*.

II. PROPOSIZIONE. *In qualunque specie di torno l'equilibrio esige che la potenza stia alla resistenza, come il raggio del cilindro sta al raggio della ruota, oppure alla lunghezza sia del manubrio, sia della manovella.*

Dimostrazione. È facile intendere, che qualsivoglia di queste macchine non è altro che una leva sotto un diverso aspetto. Infatti l'asse (AS) del cilindro contiene tutti i possibili fulcri (F) per qualsivoglia forza applicata alla macchina: la resistenza (R) è applicata, per mezzo di una fune, tangenzialmente alla circonferenza (T) del cilindro; e la potenza

(P) è applicata pure tangenzialmente o alla circonferenza della ruota (GE), o al manubrio (M), o all'estremo (B, D, N...) della manovella (BF, DF,..). In ogni caso dunque si tratta sempre di una leva di primo genere, la quale à per braccio della resistenza (R) il raggio (FT) del cilindro; e per braccio

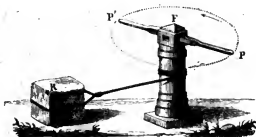



Fig. 67.

della potenza (P) il raggio (FG) della ruota, oppure la lunghezza (FN) della manovella, oppure la distanza (SM) del manubrio (M) dall' asse (AS) del cilindro medesimo. E poichè l'equilibrio esige che fra la potenza e la resistenza esista inversamente la ragione stessa, che trovasi fra i due bracci di leva; così la verità della tesi è fuori di controversia 1.

III. scolii. 1° Se la fune fosse sensibilmente grossa, dovrebbe il raggio suo, nella condizione dell'equilibrio, aggiungersi a quello del cilindro. E se più strati di fune s'avvolgessero l'uno sull'altro, dovrà aggiungersi nel calcolo anche la spessezza di ciascuno strato.

2° Per evitare l'ingrossamento del cilindro proveniente dalla sovrapposizione di più strati di fune, si suole in antecedenza fare due o tre avvolgimenti di questa sul cilindro, e consegnarne il capo ad un uomo, che la tenga tesa, affinchè quanta se n'avvolge dalla parte della resistenza, tanta se ne svolga dalla parte opposta.

1 La condizione dell'equilibrio in un tornio può essere dimostrata an-

3° Con queste precauzioni il cilindro avrà sempre minor diametro della ruota, e la macchina riuscirà a risparmio di forza, e perdita di tempo.

che in altro modo. Imaginiamo un piano orizzontale MASB, (fig. 68.) condotto per l'asse AS del cilindro. Esso piano incontra la fune GR, che sostiene la resistenza R, nel punto stesso G, in cui questa fune si stacca dal cilindro; ed incontra nel punto M l'altra fune EP tesa dalla potenza P. Congiunti dunque questi due punti G ed M con una retta GM, questessa incontrerà l' asse AS del cilindro in un punto F, il quale potrà considerarsi come l' ipomoclio della leva GM; ad una estremità G della quale è applicata la resistenza, operante secondo la verticale GR, ed all' altra estremità è applicata la potenza, che agisce in una direzione giacente nel piano AEM della ruota, ma inclinata all'orizzonte. La EM si prolunghi sino a P, affinchè la MP rappresenti l' energia della potenza, e quest' ultima si decomponga in due; una verticale MN, e l'altra MQ orizzontale e diretta verso il centro A della ruota. Poichè questa componente rimane distrutta dalla resistenza dell'asse, riuscirà efficace la sola MN per equilibrarsi colla GR. Siamo dunque nel caso di due forze parallele MN, e $GR = r$, applicate agli estremi di una leva GM, avente il fulcro in F. Quindi la proporzione $MN : r :: GF : MF$. Ora i due triangoli GFS, AMF pel parallelismo di AM con BS sono simili. Dunque sarà $GF : MF :: GS : AM$; e però

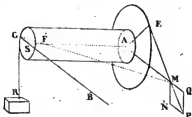



Fig. 68.

$$MN : r :: GS : AM.$$

Sono inoltre simili anche i triangoli MPQ, ed AEM. Dappoichè ànno due angoli verticali, e due altri che sono retti, essendo MQ orizzontale e QP verticale, ed AE raggio della ruota passante pel punto di contatto della tangente EM. Dunque $MP : PQ :: AM : AE$. Ma $MP = p; PQ = MN$; però

$$p : MN :: AM : AE.$$

Ora, moltiplicando questa seconda proporzione per l'antecedente, avremo $MN \times p : r \times MN :: GS \times AM : AM \times AE$ ossia

$$p : r :: GS : AE.$$

Ma GS è il raggio del cilindro, AE è quello della ruota. Dunque etc.

16. Ruote dentate e ruote a cingoli. — All' asse nella ruota si riferiscono principalmente certi due sistemi, dei quali passiamo a dare un cenno.

I. DEFINIZIONI. 1ª Sotto la denominazione di *ruote a cingoli* s'intende un sistema di torni costruito nella seguente forma (fig. 69.). I cilindri (D, E, F) sono molto corti o bassi, e si chiamano *rocchetti*. Alla prima ruota (A) si avvolge una fune, o una cinghia di cuoio, la quale va strettamente ad abbracciare il rocchetto (E) annesso alla ruota (B), che viene appresso: una seconda coreggia è avvinta strettamente tanto alla ruota seconda (B), quanto al rocchetto (F) della terza ruota (C): e così di sèguito. Al primo rocchetto (D) poi è annessa

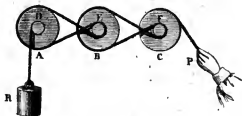



Fig. 69.

la fune (DA) che porta la resistenza (R); e l'ultima ruota (C) è circuita dalla fune, che è tesa dalla potenza (P).

2ª Coll' appellazione di *ruote dentate* [1] si vuole intendere un sistema di torni costruito in questo modo. I cilindri so-

[1] Posto che una ruota dentata di 100 denti ingrani in un rocchetto di soli 10 denti, è manifesto che, quando essa ruota fa un giro, il rocchetto ne fa 10. Ma se questo sia connesso stabilmente con una seconda ruota, che abbia pur 100 denti, e questa ingrani con un secondo rocchetto parimente di 10 denti, la ruota seconda farà 10 giri, ed il rocchetto secondo ne farà 100, e 100 pure ne farà la ruota terza, annessa stabilmente al secondo rocchetto. In generale si chiami N il numero dei denti della prima ruota, ed n quello del rocchetto annesso alla ruota seconda, i giri x di questa staranno ad 1 giro solo della prima, come $N : n$. Ossia $1 : x :: N : n$; ed $1 = \frac{N}{n} . x$. Se N' rappresenta il numero dei denti della seconda ruota, ed n' quello dei denti del secondo roc-

no anche in questa macchina (fig. 70.) assai bassi; ma tutti, meno l'ultimo, sono circondati da denti, come le ruote dell'orologio: e chiamansi parimenti *rocchetti*. Al modo stesso tutte le ruote, meno la prima, sono dentate. I denti della prima ruota (A) ingranano con quelli del rocchetto secondo (B); quelli della seconda (B) addentellano con quelli del rocchetto terzo (C), e via dicendo. Sulla circonferenza poi del primo rocchetto (che è sdentato) s'avvolge la fune la quale sostiene la resistenza (R), e dalla circonferenza dell'ul-

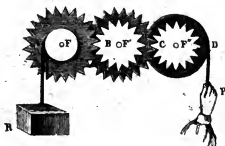



Fig. 70.

tima ruota (D) viene, per mezzo della potenza (P), svolta una fune ravvoltavi in antecedenza.

chetto, parimenti gli y giri fatti dalla seconda ruota, quando la prima ne fa x, saranno dati dalla proporzione $x : y :: N' : n'$ ed $x = \frac{N'}{n'} . y$. E sostituendo questo valore nella prima, avremo $1 = \frac{N}{n} \times \frac{N'}{n'} . y$. Si comprende bene che i z giri di una terza ruota, chiamando N'', n'' i denti, saranno determinati da $y = \frac{N''}{n''} . z$. Ed avremo, anche sostituendo, $1 = \frac{N}{n} \times \frac{N'}{n'} \times \frac{N''}{n''} \times z$. Ove dunque si chiamino u i giri dell'ultima ruota, in generale potrà dirsi che $1 : u :: N \times N' \times N'' \times \ldots : n \times n' \times n'' \times \ldots$.. Cioè il numero dei giri fatti dalla prima ruota sta a quelli fatti dall'ultima, come il prodotto dei denti di tutte le ruote sta al prodotto dei denti di tutti i rocchetti.

II. PROPOSIZIONI. 1ª *Nelle ruote dentate si avrà l'equilibrio, quando la potenza sarà tanto minore della resistenza, quanto il prodotto dei raggi di tutte le ruote è maggiore del prodotto dei raggi di tutti i rocchetti.*

Dimostrazione. Le ruote dentate si riducono ad un sistema di leve. Chè i raggi (AF, BF′, CF″) dei rocchetti rappresentano i bracci delle resistenze parziali applicate alle singole leve, ed i raggi (DF″, CF′, BF) rappresentano i bracci delle leve, ai quali s'intendono applicate le potenze parziali. Ora in un sistema di leve, come sappiamo (14. II. 2ª), l'equilibrio suppone la detta proporzionalità. Dunque ecc. 1

2ª *Nelle ruote a cingoli l'equilibrio esige, che la potenza stia alla resistenza inversamente, come il prodotto di tutti i raggi dei rocchetti sta al prodotto di tutti i raggi delle ruote.*

1 Volendo dimostrare questa proposizione direttamente, si potrebbe ragionare nella seguente maniera.

La potenza P, di valore p, è applicata in D alla ruota ultima, la quale girando a destra solleva il dente C del suo rocchetto, e per mezzo di questo fa girare verso sinistra la ruota mediana. Quindi questa, riguardo alla potenza p, fa da resistenza applicata in C. Dicendo r' il valore di questa resistenza, avremo

$$p : r' :: CF'' : DF''.$$

Alla maniera medesima questa resistenza r' col muoversi fa girare verso sinistra il rocchetto mediano, a cui (precisamente in B) è applicata una seconda resistenza, il cui valore diremo r'', la quale è fatta dalla prima ruota A. Perciò

$$r' : r'' :: BF' : CF'.$$

Finalmente il rocchetto mediano col volgersi verso sinistra fa girare verso destra la ruota prima A; con che la fune, la quale sostiene la resistenza R, s'avvolge al rocchetto sdentato F; e questa stessa resistenza R è sollevata. Dunque la resistenza r'', che è fatta alla ruota mediana, viene ad essere potenza applicata in B per sollevare la resistenza R di valore r. Quindi

$$r'' : r :: AF : BF.$$

Moltiplicando ora fra loro le tre proporzioni, otterremo quest'altra: $p \times r' \times r'' : r' \times r'' \times r :: CF'' \times BF' \times AF : DF'' \times CF' \times BF$. E per conseguenza

$$p : r :: AF \times BF' \times CF'' : BF \times CF' \times DF''.$$

Dimostrazione. La ragione è identica a quella recata per le ruote dentate.

III. SCOLIO. È facile accorgersi che quanto saranno più ristretti i rocchetti, ossia quanto sarà minore il numero dei denti che li circonda, tanto sarà maggiore il risparmio della forza e la perdita della velocità.

17. Carrucola fissa e mobile. — Alla leva si riferiscono varie altre macchine, delle quali passiamo a trattare: ed in prima della carrucola.

I. DEFINIZIONI. 1ª Si chiama *girella*, ed anche *troclea*, *puleggia*, *carrucola* un disco solido incavato nella grossezza del suo contorno, per fargli abbracciare una fune, ed attraversato nel centro da un perno, che gira liberamente dentro i due fori di una staffa tenace fatta a forcina.

2ª La carrucola è detta *fissa*, quando la sua staffa è raccomandata ad un punto immobile, ed essa medesima non può che girare intorno intorno al perno.

3ª Quando la fune, che abbraccia la girella, è fissata con un suo capo ad un punto immobile, e la girella stessa non solo può ravvolgersi intorno al perno, ma può anche venire traslocata; allora la girella è denominata *mobile*.

II. SCOLII. 1° Nel determinare la condizione dell' equilibrio delle carrucole, si suppone una perfetta flessibilità nelle funi, e si prescinde da ogni attrito, dà ogni resistenza del mezzo, e da ogni peso sia della puleggia, sia delle corde.

2° La carrucola fissa reca due utilità patenti. L'una è quella di poter cangiare posto al punto d'applicazione della potenza: l'altra consiste nel poter variare a piacere la direzione della potenza medesima. Il cangiamento del detto punto d'applicazione rende talora possibile agire sopra una data resistenza, che per la sua collocazione o si sottrarrebbe ad ogni azione, o renderebbe questa difficilissima. Il cangiamento di direzione permette d'impiegare contro la resistenza una forza che forse rimarrebbe inutile, oppure anche recherebbe un incomodo, e sarebbe in favore della resistenza. Se, a cagion d'esempio, si dovesse attignere acqua da un pozzo con secchio appeso ad una fune; la potenza, ossia le braccia dell'uomo, dovrebbe agire di basso in alto, e sollevare quindi anche il peso

delle braccia stesse: ma se la fune sta accavalcioni ad una carrucola fissa, la forza opera dall' alto in basso, ed è coadiuvata dal peso medesimo delle braccia.

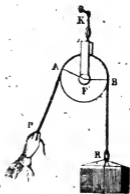
III. PROPOSIZIONI. 1ª *L'equilibrio nella carrucola fissa richiede una perfetta uguaglianza fra la potenza e la resistenza.*

Dimostrazione. Supponiamo che la fune (fig. 71.) abbracci l'arco superiore AB della circonferenza della carrucola, e che alle due estremità della fune sieno applicate le forze AP, BR, che agiscano in direzioni tangenti alla carrucola; si avrà equilibrio, quando la risultante delle due forze passerà pel punto fisso F. E poichè il punto d' applicazione della potenza p può considerarsi esser A, e quello della resistenza r esser B, così l'equilibrio esige che $p : r :: BF : AF$. Ma $AF = BF$. Dunque $p = r$. In altri termini: le forze sono applicate alla circonferenza della carrucola; il fulcro sta nel centro di questa; dunque l'equilibrio suppone l'uguaglianza fra le forze medesime.

Fig. 71.

2ª *L' equilibrio nella carrucola mobile, nel caso del parallelismo dei tratti di fune, si ottiene, quando la potenza sta alla resistenza, come* 1 : 2.

Dimostrazione. La tesi si dimostra assai agevolmente colla considerazione delle velocità virtuali. Essendo la resistenza applicata alla staffa della puleggia, quella evidentemente percorre lo spazio stesso, che è percorso da questa. Ma questessa è abbracciata da una fune, che vien divisa in due tratti rettilinei, e (nel caso presente) anche paralleli alla direzione della resistenza: Dunque ognuno di questi tratti di fune si abbrevia di tanto, di quanto si solleva la resistenza. Ma quest'abbreviazione non può aver luogo, senza che il capo della fune, a cui è applicata la potenza, si sollevi di quanto si abbreviano in somma i due tratti di fune: cioè senza che la potenza per-

corra uno spazio doppio di quello percorso dalla resistenza, o, in altri termini, senza che, a trasportare colla girella la resistenza, non si impieghi un tempo doppio di quello, che s'impiegherebbe col trasportarla alla distanza stessa, non facendo uso della detta macchina. Ora quanto si perde in tempo, tanto s'acquista in forza. Dunque ecc.

IV. COROLLARII. 1° Dunque nel caso, che i tratti di fune non sieno paralleli, la potenza si equilibrerà con una resistenza, che vale più della metà di lei. Perchè o la fune, dalla carrucola in su, si allarghi ed abbracci meno di una semicirconferenza, o si stringa e ne abbracci più, la distanza della carrucola dalla orizzontale, che passa per i due estremi della fune, è minore che nel caso del parallelismo, o della loro verticalità. E però i due tratti medesimi non si abbreviano il doppio, ma men del doppio di quello che si sollevi la resistenza [1].

[1] Questo corollario può dimostrarsi anche con maggiore esattezza; anzi può provarsi la verità della seguente più generale proposizione.

L'equilibrio nella carrucola mobile si ottiene, quando la potenza sta alla resistenza, come il raggio della troclea sta alla corda geometrica, la quale sottende l'arco (della troclea stessa) abbracciato dalla fune.

Dimostrazione. Ove si tratti di una girella mobile, (fig. 72.) l'immobilità del punto fisso K può intendersi traslocata a quel punto F, in cui la fune cessa di esser rettilinea e principia ad abbracciare la carrucola. Qui dunque sarà l'ipomoclio. Nell'altro punto A, in cui la fune abbandona la girella, e va rettilineamente fino alla potenza P, si deve supporre trasportato il punto d'applicazione della potenza medesima. Essendo poi la resistenza R raccomandata alla staffa, che è impernata nell'asse della puleggia, il suo punto d'applicazione può dirsi essere in quest'asse medesimo, ossia al centro B della troclea. Si mandino pertanto dal fulcro F due perpendicolari, una FM alla direzione PA della potenza, l'altra FN normale alla linea BR, ossia alla direzione della resistenza. L'equilibrio esige, che la risultante passi per F, e che le due perpendicolari stieno fra loro inversamente, come le forze; cioè $p:r::FN:FM$. Ora

Fig. 72.

2° Dunque il caso più favorevole per la potenza, operante per mezzo della carrucola, è il parallelismo dei due tratti di fune. Dacchè la corda di un cerchio, quando à il valore massimo, è uguale al diametro.

18. Sistema di puleggie mobili. — Il risparmio della forza, proveniente dall'uso della troclea mobile, deve evidentemente aumentarsi coll'adoprare più carrucole ad un tempo. Ma secondo il modo, onde queste sono riunite, se ne trae un vantaggio diverso: e due sono le principali maniere di combinare insieme le puleggie. Una di queste maniere consiste in quella macchina, che chiamasi *polispasto*, e di cui tratteremo quanto prima: l'altra non à nome, e di essa appunto daremo qui un cenno sotto il titolo di *sistema di puleggie mobili*.

I. DEFINIZIONE. Si chiama *sistema di puleggie mobili* un insieme di girelle, ognuna delle quali è abbracciata da una diversa fune, ed in cui ogni fune à un suo capo stabilmente fermato, e l'altro è raccomandato alla staffa della troclea seguente, oppure è afferrato dalla potenza.

II. PROPOSIZIONE. *In un sistema di puleggie mobili ed a*

FN:FM::AB:AF. Imperocchè la flessibilità perfetta della fune PAFK, e la perfetta libertà della staffa BR a girare intorno all'asse, importano che BR sia perpendicolare sopra AF, ossia che la direzione della resistenza passi nel mezzo dell'arco AMF abbracciato dalla fune, e per conseguenza anche in mezzo e normalmente alla corda geometrica AF, che sottende quell'arco. Dunque l'angolo ANB è retto, come AMF; di più le due AB, ed FM perpendicolari alla stessa AM e però parallele fra loro, essendo tagliate dalla terza retta AF, daranno uguali gli angoli alterni BAN, ed AFM. Sono dunque simili i due triangoli ABN, ed AFM. Per conseguenza fra i loro lati omologi vi sarà la proporzione AN:FM::AB:AF. Ma, per la sopraddetta ragione, AN=FN. Dunque FN : FM :: AB : AF. Ora sapevamo che $p : r$ :: FN : FM. Potremo quindi concludere, che

$$p : r :: AB : AF.$$

Il che doveasi dimostrare.

Da ciò si deduce che, nel caso del parallelismo dei tratti di fune, si avrà l'equilibrio, quando la potenza è metà della resistenza. Giacchè il braccio teorico della potenza, ossia la corda geometrica, sarà in tal caso il diametro stesso della carrucola. Ma il braccio della resistenza è sempre il raggio della carrucola stessa; e fra questo e il diametro vi è la ragione 1 : 2. Dunque ecc.

funi parallele si ottiene l'equilibrio, quando la potenza sta alla resistenza, come l'unità sta al 2 innalzato ad un esponente uguale al numero delle carrucole.

Dimostrazione. La tesi può dimostrarsi (fig. 73.) per mezzo del principio delle velocità virtuali. Infatti quando la resistenza percorre una unità di spazio, il capo della fune, che abbraccia la girella ultima (C), si solleva di 2 unità, (come si è detto nel corollario 2° del paragrafo antecedente). Ma questo capo è raccomandato alla girella penultima (B); dunque questa si solleva del doppio dell'ultima. Per lo che il capo mobile della fune, abbracciante la girella antepenultima, si solleva il doppio della penultima ed il quadruplo dell'ultima, o della resistenza. Dunque la girella antecedente si solleva anche del doppio; cioè 8 volte più della resistenza: e così via dicendo. E però il capo della fune che abbraccia la girella prima (A), quello cioè, cui è applicata la potenza, percorre uno spazio che è tante volte quello percorso dalla resistenza, quante volte il 2 innalzato al numero delle carrucole supera l'unità. Ma le forze per l'equilibrio debbono stare fra loro inversamente come gli spazii, che contemporaneamente percorrono. Dunque ecc. [1]

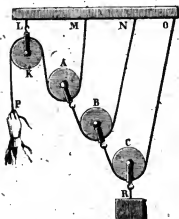



Fig. 73.

[1] Anche di questa proposizione può darsi un'altra dimostrazione.

Sia P la potenza di valore p, la quale solleva immediatamente la prima girella A con tutta la resistenza r', che questa girella offre; e, per mezzo di questessa puleggia, solleva anche r'', che è la resistenza offerta da B; e, per mezzo di B, la resistenza r'''; e così via di sèguito fino alla resistenza R, che vale r, ed è applicata all'ultima troclea C.

Certamente, nel caso del parallelismo dei tratti di fune, sarà $p=\frac{1}{2}.r'$;

19. Polispasto. — I. DEFINIZIONE. Si chiama *taglia* o *polispasto* un sistema formato di carrucole metà mobili, e metà fisse, abbracciate tutte dalla medesima fune, che passa alternamente intorno ad una mobile e ad una fissa.

II. PROPOSIZIONE. *L'equilibrio per mezzo del polispasto esige che la potenza stia alla resistenza, come l'unità al doppio numero delle carrucole mobili.*

Dimostrazione. Anche questa proposizione può dimostrarsi per mezzo del principio delle velocità virtuali, nella seguente maniera. Sarà stabilito il rapporto, che dee verificarsi fra la potenza e la resistenza per averne l'equilibrio, qualora sia stabilito il rapporto fra lo spazio percorso dalla resistenza, e quello contemporaneamente percorso dalla potenza, in caso di turbato equilibrio. Ora questo è quello stesso, che passa fra il $2n$, e l'unità. Infatti tutte le carrucole mobili si sollevano quanto la resistenza: e così ognuno dei loro tratti di fune deve abbreviarsi altrettanto. Ma questi tratti sono $2n$: dacchè n è il numero delle carrucole mobili, ad ognuna delle quali rispondono due tratti di fune. Dunque l'abbreviazione in somma della fune, compresa fra le carrucole mobili e le fisse, è di $2n$. Ma uguale a questa abbreviazione è lo spazio percorso contemporaneamente dalla potenza. Dunque la po-

$r'=\frac{1}{2}.r''$; $r''=\frac{1}{2}.r'''$;...... Quindi sostituendo ad r', r'', r''', ..., i valori qui ritrovati, avremo $p=\frac{1}{2}.r'=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.r''=\frac{1}{2^2}.\frac{1}{2}.r'''=....$ In cui si vede che p è sempre uguale al prodotto della resistenza o prima, o seconda, o terza, o... insomma ultima, per la frazione $\frac{1}{2}$ alzata ad un esponente uguale al numero ordinale, o apice, che appartiene alla stessa resistenza ultima: o, ciò che è lo stesso, al numero delle puleggie. Dunque, essendo la resistenza totale r applicata alla carrucola *ennesima*, la potenza p equivarrà, in caso d'equilibrio, a questa r, moltiplicata per $\frac{1}{2}$ alzato alla potenza n. Vale a dire

$$p=\frac{1}{2^n}.r.$$

tenza percorre uno spazio $2n$ volte maggióre di quello percorso dalla resistenza; e però questa è $2n$ volte maggiore di quella, quando si stabilisce l'equilibrio fra loro [1].

Fig. 74.

20. Piano inclinato. — L'altra macchina originaria dopo la leva è il piano inclinato.

I. DEFINIZIONI. 1ª Per *piano inclinato* (fig. 75.) s'intende comunemente una superficie (AB) piana e rigida, che faccia angolo (ABC) acuto con un piano orizzontale.

2ª La retta (AB), che rappresenta la detta superficie veduta di taglio, si chiama *lunghezza* del piano.

3ª Quella poi (AC), condotta dal punto (A) più sublime del piano perpendicolarmente all'altro piano (BC) orizzontale, che passa pel punto (B) infimo del piano stesso, si denomina *altezza* del piano.

1 La cosa stessa si dimostra anche per altra via. Essendo, nel caso nostro, ogni tratto di fune (fig. 74.) parallelo ed ugualmente teso (perchè si suppone la perfetta flessibilità della corda, ed un solo punto fisso) può tutta la resistenza r considerarsi distribuita sulle singole carrucole mobili: cosicchè, ove queste sieno n, ognuna sosterrà una sola porzione *ennesima* di r. Si esprima con r' questa porzione sostenuta dalla prima troclea A (fig. 74.), quella porzione cioè, che è sollevata immediatamente dalla potenza P, ed è valutata dalla formola $r'=\frac{1}{n}.r$. Basta che l'energia p della potenza bilanci questa prima resistenza r', cui essa immediatamente sostiene, affinchè vi sia equilibrio fra p ed r. Ora questo equilibrio si avrà, quando $p=\frac{1}{2}.r'$. Ma $r'=\frac{r}{n}$. Dunque, sostituendo, $p=\frac{1}{2}.\frac{r}{n}=\frac{r}{2.n}$, e

$$p=\frac{r}{2.n}.$$

4ª La retta orizzontale (BC), racchiusa fra la lunghezza e l'altezza del piano, viene chiamata *base*.

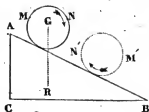
Fig. 75.

5ª La gravità (GR) di un corpo (MN), che s'intende sollevare per mezzo di un piano inclinato, suol dirsi *gravità assoluta*.

6ª Quella componente della gravità assoluta (che può certamente decomporsi in due), la quale riesce perpendicolare alla lunghezza (AB) del piano inclinato, viene appellata *pressione*.

7ª Si denomina *gravità relativa* l'altra componente della gravità assoluta medesima, qualunque ne sia la posizione; sebbene essa soglia comunemente supporsi parallela o alla lunghezza, o alla base del piano inclinato.

II. SCOLIO. La teoria del piano inclinato riesce assai più chiara, ove suppongasi che esso venga adoperato unicamente per sollevare i corpi, cioè a vincere la resistenza della gravità. Quindi tutte le superiori definizioni suppongono questo. Ma il piano inclinato può servire eziandio a vincere altre resistenze ancora: per esempio quella della forza di coesione. In tali casi sèguita a dirsi *piano inclinato* un piano rigido, solido, e congiunto obliquamente con un altro orizzontale o no. Anzi la sezione di tutta questa macchina si suppone essere un triangolo rettangolo, in cui l'ipotenusa si considera come il *piano inclinato*, il cateto maggiore come la *base*, ed il cateto minore come l'*altezza*; di più quello che si dice della gravità assoluta, decomposta in pressione e gravità relativa, s'applica ad un'altra forza qualunque, esempigrazia all'attrazione molecolare, che parimente si suppone decomposta in due altre forze, una delle quali dev'essere perpendicolare al piano inclinato. E la teoria, ritrovata per la gravità, vale in ogni altro caso.

III. PROPOSIZIONI. 1ª *Nel piano inclinato vi à equilibrio fra la resistenza e la potenza operante parallelamente alla lunghezza del piano stesso, quando questa è à quella, come l'altezza è alla lunghezza del piano.*

Dimostrazione. Sia MN (fig. 76.) un grave, che si pretende sollevare per mezzo del piano inclinato ABC; e la potenza s'intenda applicata nel centro G di gravità del corpo, ed operi parallelamente ad AB. La retta GR rappresenti la gravità del corpo, o la resistenza; e questa si decomponga in due, cioè nella GP, perpendicolare al piano, e nella GQ parallela al medesimo. Sarà GP la pressione, e GQ la gravità relativa. È chiaro che tutta la pressione GP è elisa dal piano, e non offre veruna resistenza alla potenza; si oppone dunque a questa la sola gravità relativa GQ. Per la qual cosa ad equilibrare tutta la resistenza GR, nel caso del piano inclinato, non si esige che una forza uguale e contraria a GQ. Dunque $p : r :: GQ : GR$. Ma il triangolo rettangolo GQR è simile al triangolo ABC; perchè questo pure è rettangolo, ed à un angolo ABC formato da lati AB, BC rispettivamente perpendicolari ai lati QR, GR di uno GRQ degli angoli dell'altro. Dunque $GQ : GR :: AC : AB$. Per conseguenza

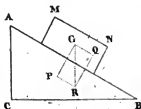



Fig: 76.

$$p : r :: AC : AB.$$

Il che doveasi dimostrare [1].

1 Queste proposizioni medesime possono dimostrarsi in una maniera alquanto differente. Si principia dal ricordare, che (8. IV. 4°) ciascuna di tre forze, due delle quali possono considerarsi come componenti dell'altra, sta alle altre, come i seni degli angoli formati dalle altre due. Per conseguenza decomposta la gravità in due, una GP perpendicolare al piano (che però è elisa da questo), l'altra GQ parallela alla lunghezza del medesimo; potrà sempre dirsi che la gravità assoluta GR (che qui rappresenta la resistenza r) sta alla relativa GQ (che è l'unica efficace nel piano inclinato; e però ad essa dev'essere uguale la potenza p per produrre l'equilibrio), come *sen.* PGQ : *sen.* PGR. E per la simiglianza del triangolo delle forze col triangolo, che è sezione verticale del piano inclinato, avremo (fig. 76.) PGQ=ACB, e PGR=ABC. Onde manifestamente sarà $p : r ::$ *sen.* ABC : *sen.* ACB. Ma ACB è angolo retto, ed il seno di 90° è uguale ad 1. Dunque $p : r ::$ *sen.* ABC : 1. Di più il seno di ABC, relativamente al raggio AB, è la retta AC, os-

2ª *La potenza, che opera contro una resistenza posata sopra un piano inclinato, e parallelamente alla base di questo, starà in equilibrio colla resistenza, purchè abbia con questa lo stesso rapporto che esiste fra l' altezza e la base del piano inclinato medesimo.*

Fig. 77.

Dimostrazione. Sia lo stesso grave MN (fig. 77.) e la potenza si supponga applicata in G ed agente parallelamente a BC. La GR si decomponga in due forze, una delle quali sia la pressione GP, e l'altra sia la gravità relativa GQ parallela alla base. Tutto il peso di MN, che dev' essere sostenuto dalla potenza si riduce dunque a GQ. Perciò $p : r :: GQ : GR$. Ma evidentemente i due triangoli ABC, e GQR, essendo formati da lati rispettivamente perpendicolari, sono simili. Dunque $GQ : GR :: AC : BC$. Onde

$$p : r :: AC : BC.$$

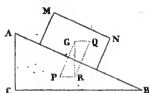
E questo appunto si dovea provare.

21. Cuneo. — Già fu detto, che il piano inclinato può servire non solo per sollevare dei pesi (nel qual caso la sua teorica è assai chiara); ma anche per superare delle resistenze, che operano in direzione diversa dalla verticale. Eccone intanto un esempio nel cuneo, a cui si riferiscono i coltelli, le ascie, le forbici, le lesine, i rasoi, e simili.

sia $AC = AB. sen. ABC$. Donde $sen. ABC = \frac{AC}{AB}$. E però

$$p : r :: AC : AB.$$

Nel caso poi che la gravità relativa sia (fig. 77.) parallela alla base, si à la proporzione $p : r :: sen. GRQ : sen. GQR$. E per la simiglianza del triangolo del piano inclinato con quello delle forze, si potrà anche dire, che $p : r :: sen. ABC : sen. BAC$. Ma $sen. ABC = \frac{AC}{AB}$; ed evidentemente $sen. BAC = \frac{BC}{AB}$. Dunque $p : r :: \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB}$; quindi

$$p : r :: AC : BC.$$

I. DEFINIZIONI. 1ª Due piani (fig. 78.) inclinati (AKDH, BKDH) congiunti insieme per le loro basi (CDKH) formano il prisma solido (BDFC), che in Meccanica vien detto *cuneo*, o *conio*, o *bietta*.

2ª L'angolo più acuto (ACB, o CD) del cuneo si chiama *vertice* e *spigolo tagliente*, o anche *taglio* o *filo* del cuneo.

3ª I piani poi (AD, BD) che formano il vertice sono denominati *lati*.

4ª Il terzo piano (BF), opposto al vertice, viene denominato *dorso* ed anche *testa* del cuneo.

5ª Si domanda *altezza* la retta (HC) abbassata dal vertice normalmente al dorso.

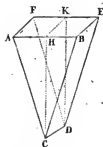



Fig. 78.

II. SCOLII. 1° Il cuneo è destinato a fendere e spaccare legno od altro. A tale scopo, il vertice del conio dev'essere intromesso in una fessura, fatta fra le due parti del corpo. Serve il cuneo anche per sollevare dei pesi, o per comprimere due corpi, ossia serrarne uno su di un altro.

2° Gli esperimenti non sono concordi intorno alla condizione dell'equilibrio da ottenersi per mezzo di un cuneo; e la teoria stessa esprime tal condizione con valori diversi, secondo il vario aspetto, sotto cui si riguarda questa macchina. Noi la riferiremo al piano inclinato: e supporremo, che la potenza operi nel senso dell'altezza del cuneo: ed è però, che potremo stabilire la seguente condizione di equilibrio.

III. PROPOSIZIONE. *Nel cuneo la potenza è in equilibrio colla resistenza, quando quella stia a questa, come la testa del cuneo sta alla somma dei lati.*

Dimostrazione. Consideriamo la sezione ABC (fig. 79.) di un cuneo isoscele, cui preme o colpisce la potenza per fargli strada fra il solido, e così per mezzo di esso vincere la resistenza che oppone la coesione, e spartire in due il solido medesimo. Ebbene: dai punti M ed N, nei quali i lati del cuneo toccano le parti della fenditura, si conducano due rette MP, ed NP perpendicolari ai lati medesimi. Queste

rappresenteranno le direzioni delle due resistenze opposte dal corpo alla potenza: perchè, ove le resistenze non fossero perpendicolari ai lati, ciascuna di esse potrebbe sempre decomporsi in due, una delle quali fosse parallela ad un lato (e questa resterebbe inefficace), e l'altra fosse perpendicolare al lato medesimo; e questa sarebbe appunto quella che consideriamo. Inoltre, se a queste due forze fa equilibrio (come si suppone) una potenza, applicata ad un punto del dorso del cuneo; bisogna dire che le due resistenze, o le due perpendicolari, s'incontrano in un punto solo, ed ànno una risultante, la quale è uguale in intensità e direzione alla potenza medesima. Sia dunque P questo punto d'incontro, e si supponga che PR rappresenti l'intensità di una resistenza r', e PS quella dell'altra resistenza r''; e, compiuto il parallelogrammo PROS, si tiri la diagonale PO. Quest'ultima rappresenterà in direzione ed intensità la risultante di r', ed r'', come la potenza p, che si equilibra con essa. Per la qual cosa potremo dire che $p : r' : r'' :: PO : PR : PS$. Ma il triangolo OPR (avendo i suoi lati rispettivamente perpendicolari ai lati della sezione ABC del cuneo) è simile a questa. Però potrà dirsi che $PO : PR : PS :: AB : AC : BC$. E sostituendo il secondo membro di questa proporzione al secondo dell'antecedente, avremo quest'altra $p : r' : r'' :: AB : AC : BC$. Donde con diritto si ottiene $p : r' + r'' :: AB : AC + BC$. Che se chiamisi r la resistenza totale equivalente ad $r' + r''$, avremo finalmente

Fig. 79.

$$p : r :: AB : AC + BC.$$

Or questo ragionamento può replicarsi per ciascuna sezione (del prisma) parallela ad ABC. Dunque ecc.

IV. COROLLARII. 1° Dunque, posto che il cuneo sia isoscele, la potenza starà alla resistenza, come la metà del dorso sta

ad uno qualunque dei lati. Infatti sarà allora $AC=BC$; quindi $p:r::AB:2AC$. E dividendo per 2 il secondo membro, e ricordando che la metà di AB è AH, avremo la proporzione $p:r::AH:AC$.

2° Dunque, se il cuneo sarà equilatero, l'equilibrio suppone la potenza metà della resistenza. Dacchè allora potremo dire $p:r::AB:2AB::1:2$.

3° Dunque quanto il cuneo è più acuto, tanto è ancora più efficace. Perciocchè quanto è più acuto il cuneo, tanto è più ristretto il suo dorso. Ma con una data resistenza si equilibra una potenza tanto più piccola, quanto il dorso è più ristretto in confronto alla somma dei lati. Dunque ecc.

22. Vite. — I. DEFINIZIONI. 1ª Supponiamo che sulla superficie di un cilindro retto corra una linea, la quale faccia un angolo costante con tutte le rette, che possono imaginarsi tracciate sulla superficie medesima parallelamente all'asse del cilindro. La curva, segnata da quella linea sulla superficie del cilindro, chiamasi *elica*.

2ª Ognuna delle rivoluzioni dell'elica, ossia quella porzione di essa che principia e termina sulla stessa retta, condotta imaginariamente sulla superficie del cilindro, viene denominata una *spira*.

3ª Chiamasi *maschio* o *mastio*, e talora anche *vite* senz'altro, un cilindro solido, intorno a cui s'avvolge ad elica un filo inflessibile, tenace, ed uniforme.

4ª Il filo inflessibile e tenace, che è ravvolto ad elica sopra il mastio, si denomina *pane* ed anche *verme* della vite.

5ª La distanza od intervallo fra spira e spira dell'elica, o fra il principio e il fine di una medesima spira, si domanda *passo della vite*.

6ª Riceve il nome di *madrevite* una chiocciola scanalata nell'interno in guisa, che i suoi incavi rispondano esattamente al verme della vite.

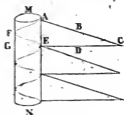
II. SCOLII. 1° Il mastio della vite non è che un piano inclinato, che si avvolge intorno al suo cilindro. A comprender ciò immaginiamo un cilindro MN (fig. 80.) ed un piano inclinato o triangolo rettangolo ABCDE, il cui cateto maggiore CE sia uguale in lunghezza alla circonferenza del ci-

lindro; ed il cui cateto minore venga posato sul cilindro parallelamente all'asse. S'immagini ancora che il triangolo sia ravvolto intorno al cilindro in guisa, che la metà D della base tocchi il cilindro nel punto G diametralmente opposto ad E, ed il punto medio B dell'ipotenusa si collochi per conseguenza in F sopra G. Ove questa operazione s'intendesse fatta con tanti piani inclinati, quanti ne possono capire sul cilindro, e si supponesse che le ipotenuse dei triangoli fossero costituite da orli rilevati o risalti; è chiaro che ogni triangolo farà una spira, e tutti insieme formeranno l'elica intera. Così questa elica costituirà il pane della vite, e il cilindro sarà il mastio della medesima. E però la vite potrà considerarsi come un piano inclinato, che s'avvolge intorno ad un cilindro; il passo della medesima uguaglierà l'altezza di ciascun piano, e la base equivarrà alla periferia del cilindro medesimo.

Fig. 80.

2° La macchina, di cui si tratta, quando in Meccanica si parla di vite, costa dunque di due pezzi; del mastio, e della madrevite. Essa può adoperarsi in tre maniere differenti. I. Può tenersi invariabilmente fissa ed immobile la madrevite, ed applicarsi ad un estremo del mastio la potenza, all'altro estremo la resistenza. Con ciò, quando la potenza gira il mastio, questo si avanza parallelamente al suo asse, e spinge la resistenza. II. Può anche esser fisso assolutamente il mastio, e mobile invece la madrevite. In questo caso la potenza fa girare la madrevite, e dalla parte, dove questa s'avanza, s'applica la resistenza, la quale per ciò è spinta dalla madrevite medesima. III. Il mastio può terminare ai due suoi estremi in due perni, intorno ai quali possa girare, senza però traslocarsi; ed invece la madrevite sia traversata da due o più cilindri fermi, lungo i quali possa scorrere, senza ravvolgersi. In questo caso, girando il mastio, la madrevite è obbligata a passare di uno in un altro pane della vite, ed a spingere dinanzi a sè la resistenza.

3° La vite può adoperarsi come macchina semplice, e co-

me macchina composta. È semplice, quando la potenza è applicata immediatamente sul pane della vite; è composta invece, quando è applicata all' estremo di una caviglia infissa al mastio, o alla madrevite. Dacchè in questi casi il piano inclinato si combina coll' altra macchina originaria, cioè con la leva.

III. PROPOSIZIONE. *Nella vite per l' equilibrio la potenza sta alla resistenza, come il passo della vite sta alla circonferenza descritta dalla potenza stessa.*

Dimostrazione. Già è stato detto che la vite si risolve in un piano inclinato, la cui altezza è rappresentata dal passo della vite, e la cui base è la circonferenza stessa del verme.

Fig. 81.

Inoltre, qualunque sia il modo dei tre sopradescritti, in cui si adopera la macchina; la potenza, chi ben consideri, sempre tende a far salire la resistenza lungo il piano inclinato, e a questo intento essa opera parallelamente alla base. Per la qual cosa I. se la potenza verrà applicata direttamente alla periferia del cilindro, invocando la teoria del piano (fig.81.) inclinato, evidentemente essa starà alla resistenza, come il passo della vite sta alla circonferenza del cilindro. II. Che se voglia applicarsi la potenza sulla periferia di un bottone annesso al mastio, o all' estremo di una caviglia infissa, vuoi al mastio medesimo, vuoi alla madrevite; allora quando essa percorre una circonferenza intera, il cui raggio sia o quello del bottone o la lunghezza della caviglia, la resistenza non fa che un passo della vite. Onde, invocando il principio delle velocità virtuali, l' equilibrio supporrà fra la potenza e la resistenza la ragione stessa, che v' è fra il passo della vite, e la periferia descritta dalla potenza medesima.

23. Resistenze addizionali. — Nelle teoriche stabilite finora si è fatta astrazione da tutti gl' inevitabili impedimenti ed ostacoli, i quali vengono a porsi, se posso dir così, dalla parte della resistenza, ed alterano le condizioni

dell' equilibrio. Se il trattare allora di queste, che potremo dire *resistenze addizionali*, avrebbe imbarazzata e scompigliata l'analisi, il passarle ora sotto silenzio renderebbe monca ed inapplicabile la teoria. Diamone adunque un cenno.

I. DEFINIZIONI. 1ª Si dice *mezzo* il fluido ponderabile, in cui si muove la macchina o qualcuna delle forze. Questo è comunemente l'aria, e talora anche l'acqua.

2ª *Resistenza* del mezzo è l'impedimento che fa il fluido al movimento, pel quale si adopera la macchina.

3ª Quando trattando delle resistenze addizionali si parla di *rigidità* delle funi, non s'intende la loro inflessibilità, ma la non perfetta flessibilità.

4ª *Attrito* è l'impedimento, che nasce dalla poca levigatezza dei corpi, i quali strisciano o girano uno sull'altro; come avviene quando la resistenza si fa salire su per un piano inclinato, e quando i perni delle carrucole s' avvolgono dentro i fori della staffa, e via dicendo. Quest' ostacolo si chiama così; perchè nasce dall'incastrarsi, che fanno le une dentro le altre le asprezze o le punte (le quali non mancano mai del tutto sulla superficie dei corpi) onde queste tendono a spezzarsi mutuamente.

5ª Si dice attrito di *prima specie*, o *radente*, quello di un corpo, che senza volgersi striscia su di un piano.

6ª Si chiama *volvente* o *di seconda specie* l' attrito di un cilindro, o di una sfera che ruzzola sopra un piano.

7ª Vien detto *attrito composto*, o *di terza specie*, quello che nasce dal volgersi di una girella dentro un cerchio, o del mozzo di una ruota intorno alla sala.

II. SCOLII. 1° Il moto comunicato alle molecule del mezzo, sia dalla potenza, sia dalla resistenza, sia dalle parti stesse della macchina, produce per reazione un' uguale perdita di quantità di moto in tutto il sistema. E però il fluido, in cui dee agire il sistema o qualche sua parte, si oppone a tutti i movimenti, e favorisce l'equilibrio. Si capisce poi assai agevolmente, che la perdita di movimento dev'esser maggiore nei fluidi più densi e più pesanti, che nei più leggièri; e che, trattandosi di fluidi compressibili, essa deve aumentare colla velocità del moto.

2° Quanto alla rigidità delle funi, si avverta che, a far sì, che queste si ravvolgano intorno alle puleggie, si esige l'impiego di una certa forza, la quale vinca la resistenza opposta dalla loro non perfetta flessibilità: forza che non è stata calcolata nelle formole teoriche. Ond'è che la potenza o la sola resistenza potrebbe essere alquanto maggiore di quello, che ivi è stabilito, e ciò non ostante l'equilibrio non ne verrebbe turbato. Per romperlo, converrà invece che una delle due forze superi l'altra più che un poco. Dagli esperimenti risulta che una fune, cui vuolsi piegare, resiste tanto più, quanto è maggiore il peso che l'aggrava, quanto la fune è più grossa, e quanto è minore il diametro del cilindro, a cui essa s'avvolge. Anzi si suole ammettere comunemente, dietro le sperienze di Desaguliers, che *le rigidità delle funi sono come i loro raggi moltiplicati pei pesi, che le tendono, e divisi pei raggi dei cilindri, intorno ai quali s'avvolgono.*

3° Fra tutte le resistenze addizionali la più importante, e quella eziandio, sulla quale si sono stabilite alcune leggi un poco più esatte, è certamente l'attrito. Non v'è bisogno di dire che l'attrito diminuisce col levigare le superficie, le quali debbono strisciare insieme; oppure collo spalmarle di materie untuose e grasse, le quali empiano le cavità, ed entrino esse medesime nel conflitto, sostituendosi alle sostanze dure più soggette alle mutue attrizioni.

4° Riesce difficile stabilire delle leggi generali, per le quali si possa in ogni caso valutare la resistenza d'attrito, Dacchè la tessitura delle superficie, il loro grado di consistenza, la pieghevolezza delle loro prominenze, la forma e le dimensioni dei risalti e delle cavità variano anche nei solidi della specie medesima.

5° Ciò non ostante vi sono alcune poche leggi sicure sull'attrito. Esse sono state dedotte da sperienze istituite per mezzo di strumenti chiamati *tribometri*. Tre sono i principali. 1. Una lunga tavola orizzontale di legno costituisce il piano, su cui si pone il corpo, il cui attrito si vuole misurare. Su questa tavola riposa una specie di treggia, che è parimente di legno, ed è munita d'un uncino, a cui si attacca una funicella, la quale corre parallelamente alla tavola, passa acca-

valeioni sopra una carrucola (la cui staffa è fissata all'estremità della tavola medesima), è cadendo verticalmente sostiene un bacino. Il peso del bacino, più i pesi, coi quali bisogna caricare questo medesimo per ottenere nella treggia un principio di movimento, dànno la misura dell'attrito. II. Con uno dei due solidi, dei quali si pretende valutare l'attrito, cui soffrono strisciando l'uno sull'altro, si forma un piano girevole su due cardini, affine di poterne variare a piacere l'inclinazione all'orizzonte. L'altro poi, dei due sopradetti corpi, si posa sul piano medesimo; e si cerca l'inclinazione più ripida di questesso, in cui l'altro solido si sostiene. III. Il tribometro, che può così chiamarsi per antonomasia, è quello formato da cinque ruote; e serve a misurare tutte e tre le specie di attrito. Quattro ruote mobilissime ed uguali (fig. 82.) sono fermate due a

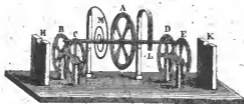



Fig. 82.

due colle loro staffe sopra un piano in maniera, che la circonferenza dell'una si sovrapponga in parte su quella dell'altra; e sieno parallele fra loro. Così ogni coppia forma superiormente un angolo a lati circolari, sul quale può posarsi l'asse di una quinta ruota più grande. Poniamo ora, che a quest'asse medesimo sia fermato un capo di una molla d'acciaio, la quale, dopo essersi ravvolta più fiate sopra sè stessa, vada coll'altro capo a connettersi stabilmente ad un braccio immobile. È chiaro che, col girare la ruota grande, la molla s'avvolgerà maggiormente sopra sè medesima, ed imprimerà alla ruota (quando questa sarà lasciata libera) un moto oscillatorio intorno al suo asse. Or questo moto della ruota grande metterà alla sua volta in movimento le quattro piccole ruote: e perciò l'asse della ruota grande soffrirà, sulla intersecazione

delle circonferenze delle piccole, l'attrito volvente. Che se a fianco dell'asse della ruota grande sia fissata una lamina di metallo, che possa essere messa a combaciamento coll'asse medesimo, potrà aversi fra i due corpi l'attrito radente. Quando poi il medesimo asse venga appoggiato entro opportune cavità, l'attrito che esso soffre, quando la ruota oscilla, diverrà composto. Siccome in ogni caso le oscillazioni della ruota grande sono prodotte dalla forza medesima della molla; così dal numero di esse si potrà dedurre la quantità di forza che viene distrutta nell'attrito composto, e nel radente, in confronto all'attrito volvente.

III. LEGGI. Sull'attrito, come dicevamo, si sono ritrovate delle leggi più esatte, che in ogni altra specie di resistenza addizionale. E le principali fra esse sono le seguenti.

1ª *L'attrito radente è maggiore del composto, e questo del volvente.* Infatti quando un corpo striscia sopra un altro, le prominenze dell'uno investono direttamente quelle dell'altro, e si spezzano a vicenda. Invece quando un corpo si volge su di un altro, le prominenze di quello si sollevano ed abbandonano i risalti di questo.

2ª *L'attrito, a parità di circostanze in tutto il resto, e dentro certi limiti, è proporzionale alla pressione.* Questa legge non può considerarsi esatta, che per le pressioni, le quali superano 400 chilometri, e sono inferiori a 1300. In forza di essa per altro l'attrito si considera come il coefficiente costante c della pressione p.

3ª *L'attrito radente varia secondo la natura delle materie, ed è minore fra le sostanze eterogenee.* Dalle sperienze risulta che fra legni nuovi e piallati $c = 0,5$, fra metalli levigati e puliti $c = 0,25$; ma fra legni e metalli $c = 0,2$. Parimenti tra ferro e ferro $c = 0,277...$, fra ottone ed ottone $c = 0,25$; ma fra ferro e ottone $c = 0,2$.

4ª *L'ampiezza della superficie, e la velocità maggiore, poco o nulla contribuisce a far variare l'attrito.* Dappoichè un parallelepipedo di legno a facce disuguali, o strisci colla faccia maggiore o colla minore, o corra veloce, o discenda lentamente, manifesta sulla tavola del tribometro una resistenza uguale.

5° *Sembra che l'attrito cresca nei primi istanti del combaciamento; giunga al suo massimo valore, e poi rimanga costante.* Questo tempo è brevissimo pei metalli, è di qualche minuto pei legni, e di parecchi giorni pei legni sovrapposti ai metalli.

IV. COROLLARIO. Da tutte le cose dette sulle resistenze addizionali si raccoglie, che queste coll'impedire il moto delle macchine favoriscono la quiete: e che però mentre la potenza, assegnata nelle formole, è eccessiva per ottenere l'equilibrio, essa medesima riesce scarsa per mettere in movimento la resistenza.

*V. Moltissime altre cose resterebbero a dirsi intorno alle macchine: nulladimeno quel poco, che n'è stato detto, è più che sufficiente per un corso elementare, destinato non agli artisti, o agli intraprenditori, che vogliono imparare a servirsene, ma ai filosofi che cercano il perchè si traggano da esse tanto grandi utilità. Anzi le cose che abbiamo esposte sono eziandio sufficienti ad eccitare la gratitudine di un animo bennato verso il Creatore. Imperocchè studiare le leggi che regolano il movimento delle macchine, e le doti delle quali è stata fornita la materia, affinchè essa potesse venirci in aiuto, e farci ottenere, con minor dispendio delle nostre forze, produzioni più abbondanti, più perfette, e spesso anche di un genere affatto nuovo in confronto di quelle, che potremmo fare, quando fossimo limitati alla sola potenza dei nostri muscoli, dei nostri denti, e delle nostre unghie; studiare, dico, tuttociò, e non sollevare la mente a ringraziare Colui, che ci fe dono di tante forze materiali, le quali gratuitamente ci servono, sarebbe villania, sarebbe viltà.

ARTICOLO II.

STEREODINAMICA.

24. Tesi fondamentale sull'urto dei corpi anelastici. — Uno dei fatti più interessanti e più elementari intorno al moto dei solidi, è certamente quello dell'urto. Or questo è diverso secondo che avviene fra corpi elastici, op-

pure fra corpi, i quali sono o molli, o nè elastici, nè molli, e però dai Matematici sono chiamati duri. Tratteremo quindi separatamente prima dell'urto dei corpi anelastici vuoi duri, vuoi molli; e poi di quello degli elastici.

I. DEFINIZIONI. 1ª Posto che due corpi procedano nella stessa via; ma o in senso opposto, o l'uno appresso l'altro in guisa, che la velocità del seguente superi quella del precedente; deve accadere inevitabilmente che essi s'incontrino, e, per la loro impenetrabilità, debbono percuotersi a vicenda. Questa percossa si chiama *urto*.

2ª Se i loro centri di gravità incedono per una stessa retta, e se di più questa retta è perpendicolare al piano tangente i due corpi nel punto di contatto, l'urto viene denominato *diretto e centrale*.

3ª Che se la retta, descritta dal centro di gravità di uno dei corpi, sia bensì normale al detto piano tangente, ma non passi pel centro di gravità dell'altro, l'urto si chiama ancora *diretto*, ma si contraddistingue col nome di *eccentrico*.

4ª Se finalmente la direzione, per cui scorre il centro di gravità di uno dei corpi, non è normale al piano tangente sopraddetto, l'urto dicesi *obliquo*.

II. TEOREMA. *Due corpi anelastici, dopo essersi urtati a vicenda, debbono procedere ambidue colla stessa velocità; e la somma delle loro quantità di moto, posteriori all'urto, dev'essere uguale alla somma algebrica delle quantità di moto, che aveano i singoli avanti l'urto.*

Dimostrazione della prima parte. Dopo l'urto i due corpi anelastici debbono essere dotati della medesima velocità. Imperciocchè la velocità del corpo urtato, dopo l'urto, non può essere nè maggiore, nè minore di quella, che avrà parimente dopo l'urto il corpo urtante. Non potrà essere minore: perchè sebbene l'urto si supponga istantaneo, ossia fatto in un tempo inapprezzabile, può nulla di meno decomporsi col pensiero in tanti piccoli urti, fatti successivamente dall'uno contro l'altro, in quel tempettò, che, per piccolo che sia, à però una durata successiva. Or bene: finchè la velocità del corpo urtato sarà minore di quella dell'urtante, questo seguiterà ad insistere su quello e a sospingerlo innanzi, comu-

nicandogli altri gradi di velocità. Dunque la velocità dell'urtato non potrà infine essere mai minore di quella dell'urtante. Nè potrà essere maggiore. Perchè, appena l'urtato avrà concepito una velocità uguale a quella, che dopo l'urto resta all'urtante, non sarà più percosso da questo, e però non riceverà più verun altro grado di velocità.

Dimostrazione della seconda parte. Già sappiamo, che quanto grande è l' azione esercitata dal corpo impellente sopra il corpo urtato, altrettanta è la reazione di questo su quello. Ora la detta azione, se fosse impiegata sopra un solo punto materiale, potrebbe valutarsi dalla sola velocità, che acquista l'urtato. Ma poichè quest' ultimo costa di molti punti materiali, ognuno dei quali acquista la stessa velocità, che dopo l'urto à il corpo intero, così *l'azione* medesima deve valutarsi e dalla detta velocità e dalla massa; e però dovrà dirsi uguale al prodotto (2.1.28ª) di queste due quantità: *sarà uguale* cioè *alla quantità di moto acquistata dal corpo urtato.* Similmente, poichè il corpo impellente non è un punto solo, ma molti; la reazione, che si fa su di lui dal corpo urtato, deve valutarsi non dalla sola velocità, ma dalla quantità di moto acquistata dall'urtante. Ma questa, essendo data in senso inverso a quella, di cui era dotato l'urtante, si risolve in una vera perdita di quantità di moto: e però *la reazione è uguale alla quantità di moto perduta dall'impellente.* Ma come avevamo già detto, la reazione è uguale all'azione. Dunque la quantità di moto acquistata dal corpo urtato è precisamente uguale alla quantità di moto perduta dall'urtante. Il che significa che *in somma* nell'urto nulla si annichila intorno alla quantità di moto: ó, in altri termini, che la somma delle quantità di moto posteriori all'urto sarà perfettamente uguale alla somma delle quantità di moto anteriori all'urto [1].

[1] Affinchè questa verità fondamentale si vegga più chiaramente, non sarà male aggiungere qui alcuni esempii particolari.

Primieramente facciamo il caso, che due corpi in forma di sfera si inseguano. I. E prima poniamo che sieno di massa uguale. Sia, a cagion d'esempio, 8 la velocità del seguente, e 4 quella dell'antecedente. Certamente quello raggiungerà questo; ed, urtandolo, prima gli darà un grado di velocità: quindi l' urtato principierà a muoversi colla velocità

25. Problemi sull'urto dei corpi anelastici. — A facilitare la soluzione dei problemi relativi all'urto dei corpi anelastici, è utile tradurre in forma algebrica la tesi.

I. SCOLIO: Si rappresenti con m la massa del corpo urtante, e con m' quella dell'urtato; v indichi la velocità che quello

4+1=5. Ma questo stesso, reagendo ugualmente sull'urtante, lo urterà alla sua volta determinandolo ad un grado di velocità in senso inverso, cioè negativa. Così l'urtante rimarrà con 8−1=7. Allora la palla seconda darà un altro impulso alla prima, e le comunicherà un'altra unità di velocità; di che l'urtata incederà colla velocità 4+1+1=6. Ma intanto questa, reagendo ugualmente sull'impellente, le darà una seconda unità di velocità negativa; e però essa resterà colla velocità 7−1=6. Da indi in poi non può accadere più urto veruno: ma allora la quantità di moto comune sarà 6 moltiplicato per le due masse: e, prese per unità queste masse, sarà 6 moltiplicato per 1+1=2, sarà cioè 6×2=12. E 12 appunto era prima la somma delle quantità di moto. Dacchè era 8×1+4×1=12. II. Facciamo che il corpo urtato sia di massa doppia dell'urtante; e che questo corra colla velocità 4, e quello colla velocità 1: che avverrà? L'urtante darà dapprima un urto capace d'imprimere ad una massa, uguale alla sua, una unità di velocità. Ma quest'urto non produrrà nell'urtato che una velocità metà; perchè l'urto deve distribuirsi sopra una massa doppia, e però ciascuna molecula non potrà assumere che un mezzo grado di velocità. Quindi tutta la massa 2 urtata dovrà principiare a muoversi colla velocità 1+0,5=1,5. Ma la sfera non cederà all'urto, se prima non abbia fatto una reazione uguale e contraria sull'impellente. Ora questa avea dato un urto capace di imprimere, ad una massa uguale alla sua propria, un grado di velocità. Tale dunque sarà l'urto che riceverà per reazione in senso inverso; e così concepirà la velocità negativa 1. Onde rimarrà colla velocità 4−1=3. Allora la massa 2 riceverà un altro urto capace di indurre un altro grado di velocità sulla massa 1, e mezzo grado sulla massa 2. Onde questa dovrà passare alla velocità 1,5+0,5=2. L'urtata allora reagendo toglierà un'altra unità di velocità all'urtante; cosicchè questa rimarrà colla velocità 3−1=2. Pareggiata così la velocità delle due palle, cesserà ogni urto. Ma si osservi che in ogni istante la quantità di moto è in somma costante. Infatti dapprima era 4×1+1×2=6; poi divenne 3×1+(1+0,5)2=3+3=6; in fine si risolse in 2×1+2×2=2+4=6. III. Dato poi che l'urtante fosse 2, e l'urtata solamente 1, e che quella avesse la velocità 8, e questa 2, accadrà che prima la sfera 2 dia un urto sufficiente a conferire un grado di velocità ad una massa 2. Allora la sfera urtata, che è di massa 1, acquisterà velocità doppia, cioè 2; e quindi avrà 2+2=4. Ma, reagendo sopra la sfera 2 con urto uguale, darà all'impellente un grado di velocità, perchè di tanto era capace l'urto da essa ricevuto. E poichè questa velocità sarà in senso inverso; però la palla urtante rimarrà colla velocità 8−1=7. Questa agirà di

avea avanti l'urto, e v' la velocità di questo parimente anteriore all'urto; e con w s'esprima la velocità comune. Poichè m' nell'urto acquista o *guadagna* una velocità che non avea prima; si principia dal dimandare quanto sia questo guadagno. Evidentemente la velocità che il corpo urtato avea prima dell'urto, ossia v', non deve computarsi come guadagno: nè anche è tutto guadagno la velocità w, che à dopo l'urto. Ma il guadagno consisterà in tutta la velocità, che possiede dopo l'urto, meno quella che già avea innanzi all'urto; cioè sarà w diminuita della v. Onde, chiamando a questa velocità acquistata dal corpo m', potremo dire

$$a = w - v'. \qquad (\alpha)$$

E però la porzione di quantità di moto, che esso stesso m'

nuovo ed ugualmente sulla sfera 1; la quale perciò acquisterà altri 2 gradi di velocità, e salirà a 6. Ma questessa reagendo levera 1 alla sfera 2; che però rimarrà colla velocità $7-1=6$. Anche in questo caso in origine la somma delle quantità di moto era $8\times2+2\times1=18$; poi divenne $7\times2+4\times1=18$; e finalmente si tramutò in $6\times2+6=18$.

Secondamente facciamo il caso che la palla urtata sia ferma. I. E qui pure poniamo prima che le due palle sieno uguali. La palla urtante avea innanzi l'urto la velocità 4; darà dunque prima 1, e rimarrà con 3; poi darà ancora 1, e l'urtata possederà 2, mentre l'urtante si ridurrà essa pure a 2. Anche qui la quantità di moto da $4\times1+1\times0=4$, diverrà $3\times1+1\times1=4$; ed in fine $2\times1+2\times1=4$. II. Se poi l'urtante fosse di massa 2; allora, supposto che l'urtante avesse dapprima la velocità 6, darà 0,5, e resterà con 5; poscia l'urtata, acquistando ancora 0,5, possederà 1, e l'urtante rimarrà con 4; quindi l'urtata arriverà ad $1+0,5$, e l'urtante avrà 3; finalmente l'urtata giungerà a 2 e l'urtante si ridurrà a 2. Così la quantità di moto sarà prima $6\times1+0\times2=6$; poi $5\times1+0,5\times2=6$; dopo $4\times1+1\times2=6$; posteriormente $3\times1+(1+0,5)2=6$; e alla fine $2\times1+2\times2=6$. III. Da ultimo, se l'urtante fosse 2, e l'urtata ferma fosse 1, nel primo colpo l'urtante darebbe la velocità 2 perdendo 1, e però da 9, per esempio, passerebbe ad 8; poi darebbe altri 2, e l'urtata avrebbe 4, mentre ad essa resterebbero 7 gradi di velocità; finalmente essa medesima si ridurrebbe a 6, dandone altri 2 all'urtata, che però ne possederebbe pur 6. Sempre la quantità di moto sarebbe $9\times2+0\times2=18$: poi $8\times2+2\times1=18$; quindi $7\times2+4\times1=18$; ed infine $6\times2+6\times1=18$.

E dunque manifesto, che le due sfere, in ogni caso, dopo l'urto avranno la medesima velocità, ed una quantità di moto uguale alla somma delle loro quantità di moto anteriori all'urto.

acquista nell'urto, è

$$m'(w-v').$$

Parimenti, poichè m perde una certa velocità, in forza della reazione che soffre; si ricerca quanta sia questa *perdita*. È chiaro, che non va computata come perdita la velocità w, che à l'urtante dopo l'urto; e nè anche può dirsi, che sia stata perduta tutta la velocità v, che essa avea prima dell'urto. Ma la perdita vera, cui chiameremo p, è data dalla velocità v, che l'urtante avea prima dell'urto, diminuita della w, ossia della velocità che à dopo l'urto; cioè

$$p=v-w. \qquad (\beta)$$

E quindi è chiaro, che la quantità di moto perduta da m sarà

$$m(v-w).$$

Or bene: come è stato dimostrato, queste quantità di moto sono uguali. Per conseguenza potremo stabilire l'equazione $m'(w-v')=m(v-w)$, ossia $m'w-m'v'=mv-mw$, oppure $m'w+mw=mv+m'v'$: e finalmente

$$w(m+m')=mv+m'v'.$$

Formola, che rimarrà così nel caso, che i due corpi si corrano appresso, sieno cioè dotati di velocità del medesimo segno. Ma nel caso, che i due corpi si vengano incontro, il segno di v' sarà negativo; e la formola si tradurrà in quest'altra $w(m+m')=mv-m'v'$. Per la qual cosa potrà dirsi in generale

$$w(m+m')=mv\pm m'v'. \qquad (\gamma)$$

II. COROLLARIO. Dunque la velocità di due corpi elastici si otterrà dividendo per la somma delle masse, che vengono in collisione, la somma algebrica delle quantità di moto anteriori all'urto. Dacchè la formola superiore (γ) può tradursi in

$$w=\frac{mv\pm m'v'}{m+m'}. \qquad (\delta)$$

III. PROBLEMI. 1° *Posto che il corpo urtante e l'urtato abbiano la stessa massa e la medesima direzione, quale sarà la loro velocità comune dopo l'urto?*

Risoluzione. Sarà la semisomma delle due velocità anteriori all' urto.

Dimostrazione. Le condizioni sono che $m=m'$, e $v'=+$. Dunque la formola $w=\frac{mv\pm m'v'}{mv+m'}$, si convertirà nella seguente

$$w=\frac{mv+mv'}{m+m}=\frac{m(v+v')}{2m}=\frac{v+v'}{2}.$$

2° *Dato che il corpo urtato prima dell'urto fosse in quiete, e le due masse sieno uguali, quale sarà la velocità comune posteriore all'urto?*

Risoluzione. Sarà la metà della velocità dell'urtante.

Dimostrazione. Poichè $v'=0$, ed $m=m'$, la formola generale diventerà $w=\frac{mv+m\times 0}{2m}=\frac{v}{2}$.

3° *Nel caso medesimo, che cioè l'urtato stesse fermo, ma fosse invece di massa grandissima, quale sarebbe la velocità comune dopo l'urto?*

Risoluzione. Ambidue i corpi resteranno fermi.

Dimostrazione. Abbiamo dunque $v'=0$, ed $m'=\infty$: quindi $w=\frac{mv+\infty\times 0}{m+\infty}=\frac{mv}{\infty}=0$. Il che spiega, perchè la Terra, ove sia urtata da un sasso, riceverà un movimento così piccolo, che sicuramente resterà eliso da qualche colpo contrario, o resistenza; per esempio da quella dell' aria.

4° *Poniamo che i corpi si corrano incontro, e che le masse dei due corpi stieno fra loro inversamente, come le loro velocità; si domanda la velocità posteriore all'urto.*

Risoluzione. Tutti e due i corpi si fermeranno.

Dimostrazione. Nel caso proposto $m:m'::v':v$, onde starà l'equazione $mv=m'v'$. Inoltre $v'=-$. Per la qual cosa $w=\frac{mv-m'v'}{m+m'}=\frac{mv-mv}{m+m'}=\frac{0}{m+m'}=0$. Qui si riferisce il caso di due corpi uguali, che si corrono incontro colla stessa velocità.

5° *Si domanda quale velocità avranno dopo l' urto due corpi di massa uguale, che si corrono incontro con disuguale velocità.*

Risoluzione. Procederanno ambedue nella direzione del corpo più veloce, e con una velocità uguale alla semidifferenza delle loro precedenti velocità.

Dimostrazione. Essendo $m=m'$, la solita formola diverrà

$w=\frac{m(v-v')}{2m}=\frac{v-v'}{2}$. Quindi w sarà uguale alla metà della differenza che passa fra v e v', ed avrà il segno positivo, se $v>v'$; l'avrà invece negativo, se $v<v'$.

26. Tesi fondamentale sull'urto dei corpi elastici.— I. DEFINIZIONI. 1ª Nei corpi elastici il fenomeno del loro trasfigurarsi à nome *compressione.*

2ª Si chiama *restituzione* il fatto, pel quale i corpi elastici riprendono la primiera figura.

II. SCOLII. 1° Quando qui si parla di corpi elastici, si suppone che l'elasticità di questi sia perfetta. Ora l'elasticità perfetta consiste nell' attitudine di riprendere (terminate che sieno tutte le oscillazioni prodotte dall' urto) esattamente la figura primiera in guisa, che non resti traccia veruna della percossa.

2° In questa supposizione la restituzione è prodotta da sforzi perfettamente uguali a quelli, pei quali è accaduta la compressione. Il perchè l'effetto della restituzione dev'essere uguale in energia a quello, che ebbe luogo nell' atto della compressione.

3° Nell'atto della compressione i corpi si sogliono considerare come se fossero anelastici. Dacchè collo sfigurarsi le parti urtate si ritirano indietro sotto l'urto; e, per quello che riguarda l'effetto meccanico, si diportano alla maniera a un di presso dei corpi molli, che s' infossano.

III. PROPOSIZIONE. *La velocità di due corpi elastici dopo l' urto è uguale alla differenza algebrica, che passa tra il doppio della velocità cui possederebbero, parimenti dopo l'urto, i corpi medesimi se fossero anelastici, e la loro velocità primitiva.*

Dimostrazione. Sappiamo dagli scolii antecedenti che l' ef-

fetto totale, che si ottiene nell'urto dei corpi elastici, è la somma dei due effetti parziali, i quali ànno luogo nella compressione, e nella restituzione. Sappiamo inoltre che l'effetto parziale della restituzione uguaglia in energia quello della compressione. Finalmente sappiamo che nell'atto della compressione i corpi si considerano, come se fossero anelastici: e però l'effetto della compressione è identico a quello, che s'avrebbe per l'urto di due corpi anelastici. Ora aggiungeremo che l'effetto della restituzione non è che la replica di quanto avviene nella compressione medesima. Imperocchè se il corpo urtato, comprimendosi, riceve un urto, e per esso una certa quantità di velocità; ne acquista un'altra quantità uguale, quando l'urtante, riprendendo la figura primiera, torna ad urtarlo. Similmente se l'urtante, quando si comprime, per la reazione che soffre dall'urtato, perde una certa quantità di velocità; perderà ugualmente altra velocità, allorchè l'urtato, nel riprendere la sua primiera figura, urta alla sua volta l'impellente medesimo. Poste tutte le quali cose potrà dirsi, che la velocità dell'urtato elastico dopo l'urto dev'essere uguale alla sua velocità primitiva più il doppio di quella velocità che acquisterebbe, se fosse anelastico: e che la velocità dell'urtante elastico, dopo l'urto, dovrà uguagliare parimente quella che avea avanti l'urto, diminuita per altro del doppio di quella che perderebbe nell'urto, se fosse anelastico. Chiamando dunque u la velocità dell'urtante elastico dopo l'urto, ed u' quella dell'urtato parimente posteriore all'urto; rappresentando inoltre con v e v' le loro velocità anteriori all'urto, con m ed m' le loro masse, con w la velocità comune che avrebbero dopo l'urto, se fossero anelastici, con p la velocità perduta nella sola compressione dall'urtante, e con a la velocità acquistata dall'urtato nella compressione; si avrà $u=v-2p$, $u'=v'+2a$. Resta a trovare il valore di p e di a. Ma questo già lo abbiamo trovato; poichè sappiamo (25. I.) dalla formola (α) che $a=w-v'$, e dalla formola (β) che $p=v-w$. Dunque potremo dire che $u=v-2(v-w)=v-2v+2w=2w-v$, ed $u'=v'+2(w-v')=v'+2w-2v'=2w-v'$. Che se le due sfere si corressero incontro, allora si dovrebbe cangiare il segno al v'. In generale si avrà

$$u=2w-v; \qquad (\varepsilon)$$
$$u'=2w-v'. \qquad (\zeta)$$

E questo appunto dovea dimostrarsi.

IV. COROLLARII. 1° La somma delle forze vive nell'urto rimane costante. Infatti coll'alzare al quadrato le formole (ε) e (ζ) si ottiene $u^2=4w^2-4wv+v^2$; $u'^2=4w^2-4wv'+v'^2$. Moltiplicando la prima di queste due per m, e la seconda per m', e poi sommandole ambedue insieme, avremo le equazioni $mu^2+m'u'^2=4w^2m-4wmv+mv^2+4w^2m'-4wm'v'+m'v'^2=$ $=4w^2(m+m')-4w(mv+m'v')+mv^2+m'v'^2$. Ma i due primi termini di quest'ultimo membro si elidono fra loro. Dacchè, come sappiamo (25.I.), $w(m+m')=mv+m'v'$; quindi moltiplicando per $4w$, potremo anche asserire che $4w^2(m+m')=4w(mv+m'v')$. Sono dunque i sopraddetti due primi termini uguali. Inoltre essi medesimi si trovano con segno contrario. Dunque, facendoli sparire, otteremo finalmente

$$mu^2+m'u'^2=mv^2+m'v'^2.$$

2° La velocità di uno dei due corpi (sia urtante sia urtato) dopo l'urto, si ottiene dividendo per la somma delle masse la somma risultante dalla doppia quantità di moto dell'altro aggiunta al prodotto della propria velocità antecedente all'urto (presa col segno suo) colla differenza, che nasce col sottrarre dalla propria massa la massa dell'altro corpo. Imperciocchè, ove nella formola (ε) si voglia sostituire ad w il suo valore dato da (**25**. I.) $w=\dfrac{mv\pm m'v'}{m+m'}$, otterremo

$$u=2w-v=2\frac{(mv+m'v')}{m+m'}-v=\frac{2mv+2m'v'-vm-vm'}{m+m'}=$$
$$=\frac{2m'v'+mv-m'v}{m+m'}.$$ E però finalmente avremo la formola

$$u=\frac{2m'v'+v(m-m')}{m+m'}. \qquad (\eta)$$

Si faccia la medesima sostituzione nella formola (ζ), ed evidentemente ne risulterà $u'=2w-v'=2\dfrac{mv+m'v'}{m+m'}-v'=$

$=\frac{2mv+2m'v'-mv'-m'v'}{m+m'}=\frac{2mv+m'v'-mv'}{m+m'}$. In fine

$$u'=\frac{2mv+v'(m'-m)}{m+m'}. \qquad (\theta)$$

27. Problemi sull'urto dei corpi elastici. — Per imparare a spiegare i fenomeni che accadono nell'urto dei corpi elastici è utile risolvere alcuni principali problemi.

I. PROBLEMI. 1° *Dato che la massa del corpo urtante fosse maggiore di quella dell'urtato, e che questo prima dell'urto fosse in quiete, si domandano le velocità posteriori all'urto.*

Risoluzione. Tutti e due i corpi procederanno nel senso dell'urtante, ma l'urtato avrà velocità maggiore di quella dell'urtante.

Dimostrazione. Qui si suppone $m > m'$, e $v'=0$; quindi la formola (η) si traduce in $u=\frac{2m'\times 0+v(m-m')}{m+m'}=$

$=\frac{v(m-m')}{m+m'}=+$. La formola (θ) poi si tramuta in

$u'=\frac{2mv+0(m'-m)}{m+m'}=\frac{2mv}{m+m'}=+$. E ciò indica che tutti e due i corpi incederanno nel senso dell'urtante. Inoltre, poichè il valore di u' à per numeratore $2v$ moltiplicato per tutto l'm, e quello di u à per numeratore il solo v moltiplicato per m diminuito di m', è chiaro che $u'>u$; cioè si muoverà con maggior velocità l'urtato che l'urtante.

2° *Nel caso che il corpo urtante sia parimente maggiore dell'urtato, ma questo corra incontro a quello, si chiede quale effetto produrrà l'urto.*

Risoluzione. Il corpo urtato ritornerà indietro.

Dimostrazione. Le supposizioni sono $m > m'$, e $v'=-$. Però potremo asserire che $u=\frac{-2m'v'+v(m-m')}{m+m'}$; ed

$u'=\frac{2mv-v'(m'-m)}{m+m'}=\frac{2mv-m'v'+mv'}{m+m'}$. Ora $mv'> m'v'$.

Dunque $u'=+$. Come doveasi dimostrare.

3° *Fatta la supposizione che in quest'ultimo caso la massa urtante sia tripla dell'urtata, e le due velocità anteriori all'urto sieno uguali, che ne avverrà?*

Risoluzione. Il corpo urtato fermerà l'urtante, ad onta che questo sia triplo di quello; ed esso medesimo retrocederà con velocità doppia.

Dimostrazione. La sola condizione $v = v'$, e $v' = -$ darà prima $u = \frac{-2m'v + vm - vm'}{m + m'} = \frac{mv - 3m'v}{m + m'} = \frac{m - 3m'}{m + m'} v$; e poi l'altra $u' = \frac{2mv - v'(m' - m)}{m + m'} = \frac{2mv - vm' + vm}{m + m'} = \frac{3m - m'}{m + m'} v$. Aggiunta ora l'altra condizione $m = 3m'$, l'equazione $u = \frac{m - 3m'}{m + m'} v$ si riduce ad $u = \frac{3m' - 3m'}{3m' + m'} v = \frac{0}{4m'} v = 0$; e l'equazione $u' = \frac{3m - m'}{m + m} \cdot v$ si converte in $u' = \frac{3 \times 3m' - m'}{3m' + m'} = \frac{9m' - m'}{4m'} = \frac{8m'}{4m'} = +2$.

Dunque il corpo di massa triplice si fermerà, e quello che è un terzo dell'altro retrocederà con duplice velocità.

4° *Supposto che il corpo urtato superi in massa l'urtante, e prima dell'urto si ritrovi in equilibrio, si domanda l'effetto dell'urto*.

Risoluzione. L'urtante ritornerà indietro, e l'urtato concepirà un piccolo movimento nel senso, com'è naturale, dell'impellente.

Dimostrazione. Poichè $m' > m$, e $v' = 0$, la (n) si tradurrà in $u = \frac{2m' \times 0 + v(m - m')}{m + m'} = v \frac{m - m'}{m + m'} = -$; la ($o$) poi diverrà $u' = \frac{2mv + 0(m' - m)}{m + m} = \frac{2mv}{m + m'} = +$.

5° *Pongasi ora che parimente la massa dell'urtato sia mag-*

giore di quella dell' urtante, e che di più quello corra incontro à questo: che ne succederà?

Risoluzione. L'urtante ritornerà indietro, e il moto dell'urtato diminuirà.

Dimostrazione. Si pone $v' = -$; ed $m' > m$: dunque $u = -\frac{2mv' + v(m - m')}{m + m'} = -$. Infatti anche il secondo termine del numeratore deve essere negativo, in forza della condizione $m' > m$. Sarà poi $u' = \frac{2mv - v'(m' - m)}{m + m'}$.

6° *Fatto che in quest'ultimo caso la massa urtata sia tripla dell'urtante, ma uguali le due velocità anteriori all'urto, quale ne sarà la conseguenza?*

Risoluzione. La massa triplice si fermerà, e l' altra retrocederà con doppia velocità,

Dimostrazione. Già sappiamo (3°) che la sola prima condizione dà le equazioni $u = \frac{m - 3m'}{m + m'} v$; ed $u' = \frac{3m - m'}{m + m} v$. Aggiungasi l'altra condizione, che cioè $m' = 3m$, e la prima diviene $u = \frac{m - 3 \times 3m}{m + 3m} = \frac{m - 9m}{4m} = \frac{-8}{4} = -2$; la seconda poi si traduce in $u' = \frac{3m - 3m}{m + 3m} v = \frac{0}{4m} = 0$.

7° *Principiamo ora a supporre che le due masse sieno uguali; e prima facciamo, che le due sfere innanzi l'urto procedano nel senso medesimo: se ne cerca l'effetto.*

Risoluzione. Ambedue le sfere seguiranno a muoversi nell'antecedente direzione; ma l'urtata colla velocità dell'urtante, e l'urtante con quella dell'urtata.

Dimostrazione. Poichè $v' = +$, ed $m = m'$, la formola (η) diverrà $u = \frac{2m'v' + v \times 0}{2m'} = v'$; e la formola ($\theta$) si tradurrà in $u' = \frac{2mv + v' \times 0}{2m} = v$.

8° *Nel caso stesso, se il corpo urtato si ritrova fermo, che avviene?*

Risoluzione. Si ferma l'urtante, e principia a muoversi l'urtato colla velocità stessa di quello.

Dimostrazione. Qui $v'=0$, ed $m'=m$. Dunque la (n) diventa $u=\frac{2m'\times 0+v\times 0}{2m}=\frac{0}{2m}=0$; e la ($o$) dà $u'=\frac{2mv+0\times 0}{2m}=v$.

9° *Finalmente se le due sfere si venissero incontro, e fossero ancora uguali, che accadrebbe?*

Risoluzione. Ambedue ritornerebbero indietro, ma una colla velocità dell'altra.

Dimostrazione. Se $m=m'$, e $v'=$, — potremo dire

$$u=\frac{-2m'v'+v\times 0}{2m'}=-v'; \text{ed } u'=\frac{2mv-v'\times 0}{2m}=v.$$

II. COROLLARIO. Da questi ultimi tre problemi discende, che dunque i corpi elastici uguali nella collisione si permutano le velocità vuoi in quantità, vuoi in direzione.

III. SCOLII. 1° Da quest'ultimo corollario può trarsi la spiegazione dei curiosi fenomeni, che si ottengono col, così detto, apparato di Mariotte. Consiste questo in una serie di palle elastiche, uguali, ciascuna delle quali è appesa ad un proprio filo a guisa di pendolo, ed in maniera che non solo tutte stieno a contatto, ma abbiamo ancora i loro centri in una medesima linea orizzontale. Communemente l'apparato costa di 7 palle d'avorio; ognuna delle quali è appesa a due fili (fig. 83.), affinchè coll'alzarla non esca dal piano verticale, in cui si trovano tutte le altre: ma noi per brevità di discorso ne supporremo sole 5, e faremo conto che sieno appese ad un filo solo.

2° S'innalzi la prima sfera dell'apparato in modo che il filo, da cui essa pende, non esca dal piano verticale, in cui giacciono tutti i fili delle altre; e quindi si lasci cadere. Questa giungendo sulla seconda dovrà fermarsi, e l'ultima si staccherà dal suo posto, e s'innalzerà all'altezza circa, da cui la prima discese. Imperocchè la prima baratta la sua quiete

col moto della seconda, questa fa altrettanto colla terza, lo stesso accade fra la terza e la quarta: ma la quinta, ossia l'ultima, non avendo appresso altra palla, a cui comunicare il moto ricevuto, lo concepisce di fatto e sbalza, come avrebbe fatto la seconda, se le palle fossero state due sole.

3° Se invece si innalzino le due prime sfere, senza che i loro fili escano dal piano degli altri, e parimente si abbandonino a sè stesse; appena queste avranno colpito le altre, si fermeranno, ma le ultime due saliranno alla stessa altezza: giac-

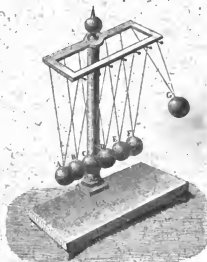



Fig. 83.

che la seconda palla (che è quella che precede l'altra nella caduta) colpendo la terza, permuta colla quiete di questa il moto suo. Ma non sì tosto si è fermata, che già riceve l'urto dalla prima che le cadeva appresso, e che per la sua inerzia dovrebbe salire dall'altro lato. Ond'è, che la seconda prende tutto il moto della prima, e le restituisce la quiete sua; e la terza (quando avea appena permutato il moto della seconda colla quiete della quarta) riceve quest'altro secondo moto. Per la qual cosa anche la quarta, non appena à cangiato il suo moto (ricevuto mediatamente dalla palla seconda) col

riposo della quinta, ed è rimasta scoperta (perchè la quinta si stacca e sale come nel caso antecedente), che già riceve dalla terza l'urto fatto in origine dalla prima: onde, appena à dato alla terza la quiete sua, sbalza appresso alla quinta.

4° Ove poi se ne innalzino tre alla maniera solita e si lascino cadere sulle due residue, una di queste tre, cioè la terza, deve unirsi alle altre due e salire con esse. Dappoichè la terza colpisce la quarta, e si ferma, e questa fa sbalzare la quinta fermandosi essa pure. Ma, non ancora la terza si è fermata, che già è colpita essa medesima dalla seconda, che le viene appresso, onde passa il suo moto alla quarta; e però questa che si trova libera si unisce alla quinta e sale con essa. Ma di nuovo quando la terza è lì per fermarsi riceve dalla seconda l'urto che imprime su questa la prima, la quale cadeva appresso alla seconda e trovava in questa un ostacolo a proseguire il suo moto. Per la qual cosa la terza trovandosi libera, perchè in questo momento la quinta e la quarta si sono staccate da lei, si associa ad esse e sbalza dall'altra parte.

5°. Ora si capisce senz'altra analisi il perchè, sollevandone quattro e facendole cadere sull'ultima o sulla quinta, la quarta, la terza, e la seconda si associano alla quinta medesima, e salgono dall'altra parte, lasciando lì ferma sulla verticale la sola prima.

IV. ALTRI PROBLEMI. 1° *Suppongasi una serie di corpi perfettamente elastici, disposti coi loro centri in linea retta, e grandi in modo che la massa del primo sia duplice della massa del secondo, quella del secondo sia duplice di quella del terzo, e via dicendo; se il primo con una certa velocità colpisse il secondo fermo, con quale velocità si muoverebbe l'ultimo?*

Risoluzione. Chiamando v la velocità della prima massa m, ed n il numero dei corpi elastici; la velocità dell'ennesimo sarà $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \times v$.

Dimostrazione. La velocità del corpo urtato è data dalla formola (θ), cioè $u' = \frac{2mv + v'(m' - m)}{m + m'}$. Sostituiti in questa

i valori dati dal problema, cioè $v'=0$, $m'=\frac{m}{2}$. avremo $u'=\frac{2mv}{m+\frac{m}{2}}=\frac{2mv}{\frac{3}{2}m}=\frac{4mv}{3m}=\frac{4}{3}v$. Per la velocità del terzo corpo dovrà invocarsi la formola $u''=\frac{2m'v'+v''(m''-m')}{m'+m''}$.

Ma qui pure $v''=0$, $m''=\frac{m'}{2}$; inoltre $v'=\frac{4}{3}v$. Dunque

$$u''=\frac{2m'.\frac{4}{3}v}{m'+\frac{m'}{2}}=\frac{2m'.\frac{4}{3}v}{\frac{m'.3}{2}}=\frac{4m'.\frac{4}{3}v}{3m'}=\frac{4}{3}\times\frac{m'}{m'}.\frac{4}{3}v=(\frac{4}{3})^2v.$$

Proseguendo al modo medesimo, si vede chiaro che la velocità di uno qualunque di quei corpi elastici è $\frac{4}{3}v$ innalzato ad un esponente, che è di una unità inferiore al numero che spetta a quel corpo. Dunque ecc.

2° *Per converso suppongasi che il corpo urtato sia perfettamente elastico, fermo ed infinitamente grande; quale velocità concepirà esso, per l'urto di un altro corpo elastico; e quale sarà quella che rimarrà all'urtante?*

Risoluzione. L'urtato rimarrà in quiete, e l'urtante rimbalzerà colla medesima velocità.

Dimostrazione. Le condizioni sono $v'=0$, ed $m'=\infty$; Inoltre le quantità finite spariscono in confronto alle infinite. Quindi la (n) diverrà $u=\frac{2\times\infty\times0+v(m-\infty)}{m+\infty}=\frac{mv-\infty v}{m+\infty}=\frac{-\infty v}{\infty}=-v$. La formola ($o$) poi si tradurrà nella seguente $u'=\frac{2mv+0}{m+\infty}=\frac{2mv}{\infty}$. Il che significa che la

velocità dell'urtato sarà infinitesima; ossia una quantità piccola più di qualunque assegnabile, la quale per conseguenza sarà certamente elisa: perchè una resistenza, almeno estremamente piccola, non può mai mancare.

28. Urto obliquo dei corpi elastici. — Consideriamo ora l'effetto dell'urto eccentrico di una sfera elastica sopra un'altra sfera infinitamente grande; o, in altri termini, consideriamo l'effetto dell'urto obliquo sopra un piano.

I. DEFINIZIONI. 1ª Il piano elastico colpito dalla sfera pure elastica, à nome *piano riflettente*.

2ª Si chiama *punto d'incidenza* il punto del piano riflettente toccato dalla palla urtante.

3ª L'angolo formato dalla perpendicolare, sollevata sulla superficie colpita e dal punto d'incidenza, colla direzione della palla che va a percuoterla, si chiama *angolo d'incidenza*.

4ª Il piano, in cui giace quest'angolo, à nome *piano d'incidenza*.

5ª È detto *angolo di riflessione* quello formato dalla perpendicolare medesima, e dalla direzione che prende la palla nel rimbalzare indietro.

6ª Col nome di *piano di riflessione* s'intende il piano, in cui giace l'angolo di riflessione.

II. PROPOSIZIONE. *Un corpo perfettamente elastico, dopo avere urtato un piano resistente parimente elastico, rimbalza formando l'angolo di riflessione uguale a quello d'incidenza, senza perdita di velocità, e senza deviazione dal piano d'incidenza.*

Dimostrazione. Sia AB (fig. 84.) il piano elastico, o la porzione di superficie sferica infinita elastica, in cui va ad urtare la palla elastica M; e la direzione di quest'ultima sia MI. Sul punto I s'intenda sollevata la perpendicolare IP; e, prolungata sotto il piano la MI, si prenda su questa prolungazione la parte IQ rappresentante lo spazio che la sfera M percorrerebbe in un secondo, se non trovasse veruno impedimento sul piano AB; rappresenti cioè la velocità primitiva di M, o la forza che spinge questo corpo sul piano. Questa si decomponga in due, una IN normale al piano AB, e l'altra ID giacente sul piano riflettente medesimo. Se la sfera fosse anelastica,

tutta la componente IN resterebbe elisa dal piano, ed essa scorrerebbe lungo questo colla forza rappresentata dall'altra componente ID. Ma, trattandosi di corpi elastici, la componente IN verrà restituita tutta in direzione contraria, ossia secondo IC: e però il mobile si troverà animato dalle due forze IC, ed ID. Per la qual cosa, compiendo il parallelogrammo su queste due ultime, certamente la sfera elastica nella detta unità di tempo percorrerà la diagonale IR. Ciò posto, si facciano le seguenti avvertenze. I. Questa diagonale è evidentemente uguale alla IQ; e però il mobile non perderà nulla della sua velocità. II. Questa stessa sta nel piano MIP:

Fig. 84.

dacchè IQ sta certamente, come la MI (di cui è prolungazione) nel piano BIN, in cui si ritrovano le sue componenti IN ed ID. Ma nel piano stesso BIN stanno ancora le due IC, ed ID, e la loro risultante IR. Dunque tanto la IM, quanto la IR si trovano nel piano MIP determinato dalla IM, e dalla IP perpendicolare sul piano riflettente. III. Finalmente l'angolo PIR è uguale ad MIP. Perchè PIR à per complemento DIR, ed MIP à per complemento AIM. Ma AIM=DIQ, essendo opposti al vertice: di più DIQ=DIR, essendo IR ed IQ diagonali di parallelogrammi uguali. Ond'è certamente AIM=DIR, e per conseguenza anche MIP=PIR [1].

[1] Quando si vogliano stabilire le teoriche dell'urto relativamente ai corpi imperfettamente elastici, debbono farsi le seguenti considerazioni. Il corpo perfettamente anelastico urtato (**25.** I.) à dopo l'urto una tale velocità w, la quale deve essere uguale a quella v', che esso stesso avea prima dell'urto, più quella a che il medesimo acquista nell'urto: ossia $w=v'+a$. Il corpo (**25.** I.) simile urtante avrà dopo l'urto una velocità w, uguale a quella v, che avea avanti l'urto, meno quella p, che esso medesimo perde per la reazione, cui soffre nell'urto stesso: cioè $w=v-p$. Invece se i due corpi fossero perfettamente elastici, evidentemente (**26.** III.) il corpo urtato avrebbe dopo l'urto una velocità u', uguale all'antecedente v', più il doppio di quella, che acquisterebbe

29. Moto uniforme. — Abbiamo già (**2.** I. 8°) definito, che cosa intendasi per moto uniforme; ora stabiliremo su questo una proposizione, e ne trarremo un corollario.

nell'urto, se fosse anelastico: vale a dire $u' = v + 2a$. L'urtante poi avrebbe la velocità u, uguale alla velocità anteriore all'urto meno il doppio di quella che, se fosse anelastico, perderebbe nell'urto medesimo; ossia $u = v - 2p$. Il che significa come la differenza, che passa fra i due casi, consiste nel solo coefficiente del secondo termine a oppure p. Dacchè se i corpi sono anelastici il detto coefficiente è **1**, se elastici è **2**. Ove dunque si tratti di due corpi imperfettamente elastici, si avranno le stesse formole rappresentanti le loro velocità posteriori all'urto, colla differenza che il coefficiente del secondo loro termine non sarà nè **1**, nè **2**, ma un numero intermedio a questi. Rappresenti n un tal coefficiente, e potremo asserire, che la velocità u, posteriore all'urto, dell'urtante quasi elastico è $u = v - np$: e quella u', della quale godrà dopo l'urto il corpo urtato ugualmente quasi elastico sarà $u' = v' + na$: Ora, come sappiamo (**25.** I.) dalle formole (α) e (β), $a = w - v'$, $p = v - w$. Dunque $u = v - n(v - w)$, $u' = v' + n(w - v')$. Inoltre, dalla formola (δ), $w = \frac{mv + m'v'}{m + m}$. Per la qual cosa $u = v - n\left(v - \frac{mv + m'v'}{m + m'}\right)$, ed $u' = v' + n\left(\frac{mv + m'v'}{m + m'} - v'\right)$. Quindi $u = v - n\left(\frac{vm + vm' - mv - m'v'}{m + m'}\right) = v - n\left(\frac{vm' - mv'}{m + m'}\right) = v - nm'\left(\frac{v - v'}{m + m}\right)$. D'altra parte avremo l'equazione $u' = v + n\left(\frac{mv + m'v' - mv' - m'v'}{m + m'}\right) = v' + n\left(\frac{mv - mv'}{m + m}\right) = v' + nm\left(\frac{v - v'}{m + m'}\right)$.

Queste due formole

$$u = v - nm'\left(\frac{v - v'}{m + m'}\right) \qquad (1)$$

$$u' = v' + nm\left(\frac{v - v'}{m + m'}\right) \qquad (2)$$

sono generalissime. Imperciocchè, se in esse si faccia $n = 1$, si otterrà da ambedue la formola della velocità comune posteriore all'urto nei corpi anelastici. Infatti $u = v - m'\left(\frac{v - v'}{m + m'}\right) = \frac{mv + m'v - m'v + m'v'}{m + m'} = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$. Come pure evidentemente sarà $u' = v' + m\left(\frac{v - v'}{m + m'}\right) =$

1. PROPOSIZIONE. *Nel moto uniforme lo spazio percorso in un dato tempo è uguale al prodotto della velocità pel detto tempo.*

$= \frac{mv'+m'v'+mv-mv'}{m+m'} = \frac{mv+m'v'}{m+m'}$. Se poi nelle medesime si faccia $n=2$, avremo le formole delle velocità posteriori all'urto nei corpi perfettamente elastici. Dacchè allora $u=v-2m'\left(\frac{v-v'}{m+m'}\right) =$

$= \frac{mv+m'v-2m'v+2m'v'}{m+m'} = \frac{-m'v+mv+2m'v'}{m+m'}$. E per ciò

$u = \frac{2m'v'+v(m-m')}{m+m'}$. Come ancora $u'=v'+2m\left(\frac{v-v'}{m+m'}\right) =$

$= \frac{mv'+m'v'+2mv-2mv'}{m+m'} = \frac{-mv'+m'v'+2mv}{m+m'}$. Onde sarà

$u = \frac{2mv+v'(m'-m)}{m+m'}$.

Inoltre colle medesime due formole si dimostra che, nei corpi sì perfettamente come imperfettamente elastici, ed anche negli anelastici, la somma delle quantità di moto anteriori all'urto è uguale alla somma delle quantità di moto posteriori all'urto; cioè $mv+m'v'=mu+m'u'$. Dappoichè la formola (t) moltiplicata per m dà $mu=m\left[v-\frac{n.m'(v-v')}{m+m'}\right] =$

$= mv - \frac{nmm'v-nmm'v'}{m+m'} = \frac{m^2v+mm'v-nmm'v+nmm'v'}{m+m'}$.

La formola (x) moltiplicata per m' darà $m'u'=m'\left[v'+\frac{nm(v-v')}{m+m'}\right] =$

$= m'v'+\frac{nmm'v-nmm'v'}{m+m'} = \frac{mm'v'+m'^2v'+nmm'v-nmm'v'}{m+m'}$. Si sommino ora queste insieme, e si otterranno le equazioni $mu+m'u' =$

$= \frac{m^2v+mm'v-nmm'v+nmm'v'+mm'v'+m'^2v'+nmm'v-nmm'v'}{m+m'} =$

$= \frac{m^2v+mm'v+mm'v+m'^2v'}{m+m'} = \frac{m\times mv+m'\times mv+m\times m'v'+m'\times m'v'}{m+m'} =$

$= \frac{m(mv+m'v')+m'(mv+m'v')}{m+m'} = \frac{(m+m')(mv+m'v')}{m+m'} = mv+m'v'$.

Dichiarazione. Il moto uniforme è quello, in cui è costante la velocità; in cui cioè in ogni unità di tempo viene percorsa la stessa quantità di spazio. Dunque lo spazio percorso in un certo tempo sarà proporzionale a questo tempo medesimo. In altri termini, tutti indicano la velocità (2. II.5°) pel numero, che esprime lo spazio percorso nell' unità di tempo. Dunque dire che la velocità non cangia è dire, che lo spazio percorso in ciascun secondo è sempre uguale; ed è anche dire che dopo un certo tempo è stato percorso uno spazio tante volte più grande, quanti secondi sono trascorsi. Se ne dee concludere che, a conoscere lo spazio totale percorso in un dato tempo, non si à da far altro, che moltiplicare lo spazio, percorso nell'unità di tempo, pel numero dei secondi costituenti il detto tempo. Ma lo spazio percorso nell'unità di tempo è l'espressione della velocità. Dunque ecc. In breve; esprimendo con s lo spazio totale, con v la velocità, ossia lo spazio percorso in ciascun secondo, con t il tempo, ossia il numero dei secondi; potremo scrivere

$$s=vt.$$

II. COROLLARII. 1° Dunque nel moto uniforme la velocità è in ragione diretta dello spazio, ed inversa del tempo. Dacchè, dividendo per t l'equazione $s=vt$, con una operazione elementarissima otterremo l'altra

$$v=\frac{s}{t}.$$

2° Dunque nel moto uniforme il tempo è in ragion diretta dello spazio ed inversa della velocità. Imperocchè, ove si divida per v l'equazione $s=vt$, facilmente ne trarremo

$$t=\frac{s}{v}.$$

3° Dunque se di queste tre cose s, v, t, ne sieno date, o conosciute due, potrà sempre conoscersi la terza. Il che si vede a colpo d'occhio nelle tre formole or ora stabilite.

30. Moto uniformemente accelerato. — Fu già (2. I. 9ª, 10ª, 11ª) stabilito che cosa intendasi per moto vario,

e qual moto vario chiamisi uniformemente accelerato; onde possiamo entrare in materia senza più.

I. PROPOSIZIONI. 1ª *Una forza costante continua produce moto uniformemente accelerato.*

Dichiarazione. Innanzi tratto è manifesto che una forza continua (2 I. 21ª) produce un moto vario: dappoichè essa attribuisce continuamente al mobile sempre altri gradi di velocità. Or questi vengono ad addizionarsi a quelli antecedentemente prodotti, i quali (per l'inerzia dei corpi) rimangono inalterabili. Che se la forza non solo sia continua, ma ancora costante (2. I. 22ª), ed operi sempre nella stessa direzione, in ogni successiva unità di tempo si avrà un uguale aumento di velocità; e quindi ne risulterà un moto uniformemente accelerato.

2ª *Lo spazio percorso da un mobile in un primo dato tempo, con moto uniformemente accelerato, è la metà di quello, che con moto uniforme si correrebbe da esso nel tempo medesimo in virtù della velocità acquistata in tutto il detto tempo.*

Dimostrazione. Imperciocchè tanto è lo spazio, che percorre il mobile in tutto il dato tempo con velocità *crescente*, quanto è quello che esso correrebbe nel detto tempo con una velocità *uniforme*, la quale fosse la media di tutte quelle diverse velocità, per le quali trapassa nel detto tempo. Questa infatti è la proprietà della *media* aritmetica, la quale si ottiene coll'addizionare tutti i termini, e dividerne la somma pel numero dei termini medesimi. Siccome il quoto moltiplicato pel divisore restituisce il dividendo; così la media, moltiplicata pel numero dei termini, deve restituire la detta somma. Ora un mobile che, essendo spinto da una forza costante continua, dalla quiete arriva in un dato tempo t ad essere animato da una certa velocità v, trapassa per tutti i gradi di velocità da zero fino a v. Poichè dunque in una progressione aritmetica il termine medio è la semisomma di due termini equidistanti: così la metà del termine ultimo, ossia dell'ultima velocità v (che è la massima fra tutte le velocità, dalle quali è animato il mobile durante il tempo t) sarà la media di tutte. Ma un mobile, che corresse colla metà di una data velocità uniforme, compirebbe evidentemente la sola metà di quello spazio, che esso stesso potrebbe compire, ove corresse con

tutta la data velocità. Dunque lo spazio, che percorre un mobile con velocità crescente in ragione aritmetica (poichè è uguale a quello che compirebbe con moto uniforme, ma colla velocità media fra tutte, ossia colla metà dell' ultima velocità) sarà la metà dello spazio, che compirebbe con moto parimente uniforme, se, spirato il tempo t, seguitasse a correre coll'ultima velocità v. Ma quest'ultimo spazio sarebbe $s=tv$. Dunque quello percorso nel tempo stesso con moto uniformemente accelerato sarà

$$s=\frac{1}{2}vt.$$

II. COROLLARII. 1° Dunque la velocità acquistata dopo un certo tempo da un mobile, animato da una forza continua, è uguale al prodotto di questo tempo medesimo per la velocità impressa in ciascuna unità di tempo. Poichè il moto di un mobile animato da una forza continua è uniformemente accelerato, è manifesto che in ogni unità di tempo esso acquista lo stesso grado di velocità; e però alla fine di un dato tempo esso avrà acquistati tanti di questi gradi, quante unità di tempo saranno trascorse. Ora chiamando t il tempo, g la velocità che vien data al mobile in ciascuna unità di tempo, e v l'intera velocità acquistata durante tutto il tempo t; evidentemente sarà

$$v=gt.$$

2° Dunque nel moto uniformemente accelerato lo spazio cresce in ragione dei quadrati sia del tempo, sia della velocità. Dappoichè, se lo spazio percorso con moto uniformemente accelerato in un dato tempo primo uguaglia la metà del prodotto della *velocità finale* pel *tempo*, esso medesimo sarà anche proporzionale al prodotto intero di queste due quantità. Ma questesse sono proporzionali fra loro. Dunque lo spazio è anche proporzionale al quadrato dell'una o dell' altro. E algebricamente, se nella $s=\frac{1}{2}vt$ al v si sostituisca il valore dato dalla formula $v=gt$, si otterrà

$$s=\frac{1}{2}gt^2;$$

e però $\frac{s}{t^2}=\frac{1}{2}g$. Se poi nella stessa al t si sostituisca il valore dato da $t=\frac{v}{g}$, si avrà $s=\frac{1}{2}v\frac{v}{2g}=\frac{1}{2g}v^2$, cioè

$$s=\frac{1}{2g}v^2;$$

e quindi $\frac{s}{v^2}=\frac{1}{2g}$. Or bene: in quest'ultima equazione, e nell'antecedente $\frac{s}{t^2}=\frac{1}{2}g$, il secondo membro è una quantità costante. Dunque le due quantità del primo membro sono direttamente proporzionali fra loro.

3° Dunque, se per la serie dei numeri naturali 1,2,3,4,.... si rappresentino i tempi trascorsi, oppure le velocità medie di questi tempi, le velocità finali saranno rappresentate dai numeri medesimi duplicati, ossia dalla serie dei numeri pari 2,4,6,8,... Dappoichè le velocità finali sono il doppio delle medie di ciascun tempo parziale.

4° Dunque gli spazii totali saranno rappresentati dai quadrati dei numeri naturali, ossia da 1,4,9,16,.... Imperocchè gli spazii stanno fra loro come i quadrati dei tempi.

5° Dunque finalmente gli spazii parziali percorsi nei singoli tempi saranno rappresentati dalla serie dei numeri dispari 1,3,5,7,..... Imperciocchè essendo 1 lo spazio del tempo primo, e 4 quello di due tempi; lo spazio del tempo secondo sarà 4—1=3. Parimenti lo spazio di tre interi tempi è 9: ora nei primi due tempi è stato percorso lo spazio 4, e 9—4=5; sarà dunque 5 lo spazio del tempo terzo. E così via discorrendo [1].

1 La cosa medesima può dimostrarsi con un artificio geometrico. Sulla linea AX (fig. 85.) si prendano le porzioni AB, BC, CD, rappresentanti le unità di tempo; e sul punto B si sollevi la perpendicolare BM, la quale indichi la velocità acquistata dal mobile durante la prima unità di tempo, ossia il primo minuto secondo. Poichè la forza costante dà aumenti uguali di velocità in tempi uguali, a rappresentare la velocità impressa al mobile in termine di due secondi si dovrà sopra C sollevare

31. Discesa verticale dei gravi. — Le leggi stabilite or ora per una forza astratta costante e continua s' applicano a capello alla gravità. Prima di venire a queste applicazioni, è utile studiare il modo di operare di questa forza. Già nella Parte sperimentale (**19.**) abbiamo provato che tutti corpi, i quali ci si offrono sotto qualcuno dei tre stati o di solidità, o di liquidità, o di vaporosità, sono gravi; che la cagione della loro gravità è un'attrazione, cui esercitano fra di loro le mo-

la CN doppia di BM, e sopra D la DV uguale a tre volte BM. Facciamo ora due supposizioni; la prima è che il mobile riceva fin dal principio del primo secondo tutta la velocità BM, e quindi per un minuto resti sospesa l'azione della forza continua. Si sollevi pertanto da A la perpendicolare AH=BM, e si compia il parallelogrammo ABMH; la cui area è data (come insegnano i Geometri) dal prodotto AB×BM. Ora quest' area rappresenta il valore dello spazio percorso dal mobile con moto uniforme nel primo minuto secondo. Dacchè AB è il tempo, e BM è la velocità; e di più sappiamo (**29.1.**) che appunto nel moto uniforme lo spazio è dato dalla velocità moltiplicata pel tempo. Insistendo sulla medesima supposizione, poniamo che l'altro aumento di velocità venga dato tutto ad un tratto al principio del tempo secondo; e però si sollevi su B la perpendicolare BK=CN, e compiuto il parallelogrammo BCNK, l'area di questo, ossia BC×BK, equivarrà allo spazio percorso nel tempo secondo. Al modo stesso, ponendo data nel principio del terzo tempo tutta la velocità DV, che riceve il mobile nel terzo secondo CD, lo spazio percorso in questo tempo sarà dato dall'area CD×DV. Insomma tutto lo spazio percorso in tre tempi verrà in questa supposizione rappresentato da ABMH+BCNK+CDVQ. L'altra ipotesi è, che la forza costante continua, invece di venir dando istante per istante gli aumenti di velocità, che conseguitano dalla sua costanza, dia questi solo al finire di ciascun tempo. Dunque il mobile nel primo tempo non avrà velocità veruna, e correrà lo spazio 0; nel secondo tempo avrà la sola velocità BM, e compirà lo spazio BCOM; nel terzo godrà della sola velocità CN ed esaurirà uno spazio uguale a CDUN. Insomma lo spazio totale, compiuto dopo tre tempi, sarà in questa supposizione 0+BCOM+CDUN. Ora è manifesto, che lo spazio percorso nella prima supposizione verrebbe ad essere *maggiore* del vero; e quello corso nella seconda ipotesi è *minore*, e proprio *altrettanto* minore del vero. Dunque lo spazio vero sarà quello, che risulta dall' aumentare lo

Fig. 85.

lecule dei corpi ponderabili; che l'attrazione stessa opera del pari su tutti i corpi; che il suo effetto deve aumentare come il prodotto delle masse, attratta ed attraente ; e che finalmente la sua efficacia deve variare in ragione inversa del quadrato delle distanze. Non sarà certamente un fuor d'opera ritornar qui brevemente su quest'ultimo punto.

spazio secondo di tanto, quanto vale la semidifferenza dei due spazii. Ma quant'è questa semidifferenza? Evidentemente la differenza, che passa fra lo spazio della seconda ipotesi e quello della prima, è data dalla somma dei tre parallelogrammi ABMH, MONK, NUVQ. Prendansi dunque le metà di questi, cioè ABM, MON, NUV, ed aggiungansi allo spazio BCOM+CDUN della supposizione seconda, ed avremo la somma ABM+BCOM+MON+CDUN+NUV. Ma BCOM+MON=MBCN; e CDUN+NUV=NCDV. Dunque lo spazio totale veramente corso sarà ABM+MBCN+NCDV=ADV. Dunque l'area di un triangolo rettangolo, un cui cateto rappresenti la somma dei tempuscoli trascorsi, e l'altro la velocità impressa alla fine del tempo stesso, equivale allo spazio percorso con moto uniformemente accelerato, durante un dato tempo.

Ciò premesso, si vede a colpo d'occhio, che nel moto uniformemente accelerato, rappresentando per AD il tempo t e per DV la velocità finale impressa nel tempo stesso, e per s lo spazio percorso, sarà

$$s=\frac{1}{2}vt.$$

Dacchè $s=ADV=\frac{1}{2}AD\times DV.$

Di più, siccome DV è tante volte BM, ossia g, quante sono le unità contenute in AD, così

$$v=gt.$$

Inoltre lo spazio percorso nel tempo secondo BC è rappresentato da un'area MBCN, la quale è 3 volte l'area ABM: perchè è uguale a BCM+CMO+OMN; ed ognuna di queste tre quantità è uguale ad ABM. Come pure lo spazio percorso nel tempo terzo è 5 volte quello percorso nel primo; perchè costa dei cinque triangoli CDE, ECO, EON, NEU, UNV, ognuno dei quali è uguale ad ABM. Dunque gli spazii parziali stanno fra loro come la serie dei numeri dispari.

Gli spazii totali poi sono come i quadrati dei tempi: perchè lo spazio corso in due tempi è uguale a 4 triangoli coincidenti col triangolo ABM; quello di tre tempi è uguale a 9 triangoli; e così via discorrendo.

Che se la forza continua dopo un certo tempo rimanga sospesa o cessi, il mobile per la velocità preconcepita, (che è la finale del tempo trascorso) percorrerà con moto uniforme uno spazio duplice dell'antecedente. Infatti prendendo in AX la porzione DL=AD, e formando il parallelogrammo sull'altro lato DV rappresentante la velocità finale, si avrà un'area DLFV duplice evidentemente di ADV.

I. PROPOSIZIONI. 1ª *Una molecula resta attratta ugualmente tanto dalle singole particelle di una sfera omogenea, come dalla sola particella centrale, la quale eserciti da sè una forza uguale alla somma delle attrazioni delle singòle.*

Dimostrazione. Qui non si cerca se l' effetto della attrazione esercitata dalle particelle di un corpo attraente riesca, per quanto s'attiene all'energia, identico a quello che s'avrebbe, ove nessuna delle particelle di quel corpo attraesse, ma la sola particella centrale esercitasse una forza uguale alla somma di tutte le energie delle singole. Il che è certissimo, quando il corpo attratto ritrovasi a tale distanza da potersi considerare come parallele tutte le direzioni delle attrazioni, cui soffre. Quello, che ora abbiamo bisogno di ricercare, si è se la *direzione* del moto della molecula attratta soffra qualche alterazione nella detta ipotesi. Ora quest'altro punto, ove trattisi di un corpo sferico ed omogeneo, può assai facilmente diciferarsi. Infatti si concepisca una retta, la quale congiunga la molecula attratta colla centrale della sfera attraente, e questa retta medesima si prenda per asse di simmetria. È evidente che ciascuna molecula del corpo attraente è simmetrica ad un'altra diversa del corpo medesimo; di modo che tutte le molecule attraenti possono dividersi in tante coppie, ciascuna delle quali contenga due molecule perfettamente simmetriche fra di loro, rispetto al detto asse. Or bene; se dalle due molecule di una coppia qualunque si mandino verso la particella attratta due rette, queste rappresenteranno le direzioni delle due forze esercitate dalle molecule medesime. Ma tali forze sono uguali; e però la risultante loro deve dividere a metà l' angolo formato dalle loro direzioni: dunque l'asse di simmetria, o, ciò che è lo stesso, la prolungazione del raggio terrestre (la quale perviene alla particella attratta e divide appunto quell'angolo in due parti uguali) rappresenta la direzione della risultante di ciascuna coppia di forze. Per conseguenza, nell'ipotesi che la Terra sia una sfera perfetta, un ponderabile deve cadere secondo la prolungazione di un raggio terrestre, tanto se sia attratto dalle singole molecule del globo terracqueo, quanto se lo sia solamente dalla molecula centrale.

2° *L'efficacia della gravità è varia nella ragione inversa del quadrato della distanza.*

Dimostrazione. Questa legge può dimostrarsi anche sperimentalmente per mezzo del pendolo; ma supposta la verità della tesi antecedente, si trae eziandio dal seguente ragionamento. Sieno *mn* ed *uv* (fig. 86.) due corpi attratti dalla Terra, e C sia il centro di questa. Poichè la forza attrattiva può supporsi concentrata tutta in C, questa verrà in certa guisa a diffondersi dal centro C della Terra sotto forma di tanti raggi C*m*, C*n*, C*u*, C*v*,.... Per la qual cosa i raggi che pervengono ad un medesimo corpo (*mn*, *uv*) saranno meno numerosi ed intensi, se esso si troverà a maggior distanza. Anzi questa intensità dei raggi seguirà la ragione inversa dei quadrati delle varie distanze. Imperocchè imaginando intorno alla Terra tante superficie sferiche concentriche, queste saranno trapassate dal medesimo numero di raggi. Ond'è che in ognuna la intensità di questi raggi seguirà la ragione inversa

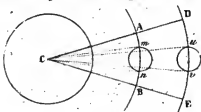



Fig. 86.

dell'area di detta superficie. Come parimenti sopra due segmenti simili AB, DE di superficie sferiche, perviene il medesimo numero di raggi d'attrazione: però in ciascuno (di questi segmenti) la fittezza dei detti raggi sarà in ragione inversa dell'area sua. Ma le aree delle superficie sferiche, ed anche dei loro segmenti simili (come s'insegna in Geometria) stanno fra loro in ragione diretta dei quadrati dei raggi geometrici; cioè AB : DE :: $\overline{AC}^2$: $\overline{DC}^2$: e questi raggi rappresentano le distanze dei corpi attratti dall'attraente. Dunque la detta fittezza dei raggi attraenti, e per conseguenza l'efficacia dell'attrazione terrestre varierà nella ragione inversa dei quadrati delle distanze.

II. COROLLARIO. Dunque la direzione della caduta dei corpi, solo nell'ipotesi che la Terra fosse perfettamente sferica, dovrebbe coincidere colla prolungazione dei raggi terrestri: ma

essendo essa invece una sferoide, quella direzione sarà nella prolungazione del raggio di curvatura o del circolo osculatore.

III. SCOLII. 1° Le leggi della caduta verticale dei gravi nel vuoto restano tutte determinate dal solo riflettere, che la gravità è una forza costante e continua. Ma possono anche determinarsi, pressappoco almeno, per esperienza; e veduto che combaciano con quelle stabilite dalla teoria per le forze costanti e continue, dedurne che appunto tale è la gravità. Le difficoltà, che s'incontrano in tal genere di esperienze, sono principalmente tre: rendere il più che si possa insensibile la resistenza dell'aria; eliminare per quanto è possibile gli attriti; attenuare la velocità del corpo cadente, affinchè si possano valutare gli spazii da esso percorsi, anche quando discende da piccole altezze.

2° A tale intendimento Galileo ricorse al piano inclinato. Si prendano due lunghe ed alte liste di ferro, e si fermino sopra un piano parallelamente fra loro a guisa di due pareti o di due rotaie, prima alquanto inclinate all'orizzonte, e poi esattamente orizzontali. Inoltre si posi su di esse il perno metallico di una ruota o disco di piombo, il cui raggio sia minore dell'altezza delle dette due liste, affinchè il disco possa girarvi dentro liberamente. Se le liste medesime ed il perno per la loro levigatezza soffriranno un attrito assai debole, la ruota di piombo, girando intorno a sè stessa, dovrà lentamente discendere lungo il piano, ancorchè questo sia leggermente inclinato; e poi per la velocità preconcepita, quasi fosse sospesa la gravità, dovrà scorrere lungo il piano orizzontale. Con questo artificio si vede, che gli spazii percorsi dal grave ne' singoli tempi successivi (primo, secondo, terzo,....) stanno fra loro, come 1, 3, 5, 7,..... Donde si deduce che gli spazii totali, dopo uno, due, tre,.... tempi), stanno come i quadrati 1, 4, 9, 16,.... Si vede ancora, che lo spazio percorso sul piano orizzontale è pressappoco doppio di quello percorso nel tempo stesso sul piano inclinato.

3° I risultati medesimi sono ottenuti, con precisione assai maggiore, per mezzo della macchina detta di *Atwood* dal nome del suo inventore. Primieramente le unità di tempo

sono (come negli orologi) distinte da un pendolo mosso da un peso o da una molla, e regolato da un così detto *scappamento ad ancora*. Il motore (fig. 87.) opera direttamente sulla ruota (R), cui chiamano *ruota d'affronto*; la quale perciò tende a prendere un moto di rotazione. Ma sopra questa ruota vi à un pezzo ($m'n'$) chiamato appunto *scappamento*, il quale è fatto ad arco e termina in due palette (m', n'), che alternamente possono afferrare i denti della detta ruota. Siccome l'asse orizzontale (A) dello scappamento è congiunto con un'asta verticale (B), e questa porta una forcina (C), la quale inforca l'asta del pendolo; così avviene, che quando il pendolo è fermo, la ruota d'affronto, e con essa tutto il movimento d'orologeria, è fermata da una (m') delle due palette. Al contrario, se il pendolo oscilla (e prende la posizione indicata dalla linea nP punteggiata), il dente che batteva contro la paletta sfugge, e la ruota gira; ma di un sol mezzo dente: perchè allora lo scappamento ($n'm'$) s'inclina in senso contrario (prende cioè la posizione mn), e l'altra paletta (n) viene alla sua volta ad arrestare il dente. Dopo, alla oscillazione seconda, questo dente passa, e la prima paletta (m') arresta il dente che viene appresso a quello cui essa fermò poco stante e così di sèguito. Quindi è che a ciascuna oscillazione del pendolo, la ruota d'affronto s'inoltra di un dente. Per la qual cosa siccome le oscillazioni (come vedremo) sono isocrone, la ruota di affronto, ed il meccanismo d'orologeria (che sono connessi insieme) camminano e s'arrestano ad intervalli uguali, e però indicano parti uguali di tempo.

Fig. 87.

4° Ciò premesso, veniamo alla descrizione della macchina. Essa è composta di una colonna di legno (fig. 88.) alta circa

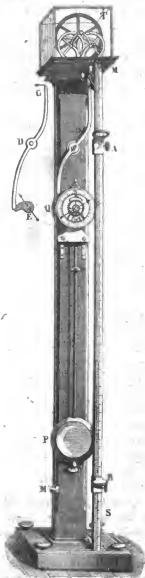



Fig. 88.

due metri e mezzo; la quale porta sopra di sè, dentro una custodia (T) di cristallo, un tribometro (**23.** II.5°), e davanti sostiene un quadrante (Q), il cui indice è fissato all' asse della ruota d'affronto, mossa dall'orologeria e regolata dal pendolo (P) or ora descritto. Parallelamente alla colonna trovasi un'asta contrassegnata con una scala (SO) divisa in centimetri, lungo la quale possono scorrere, e fissarsi con viti a qualsivoglia altezza due pezzi corsoi (A e B); uno dei quali (A) porta un anello orizzontale, e l'altro (B) sostiene un disco parimente orizzontale. All'asse poi della ruota d' affronto, e precisamente dietro al quadrante, è annesso un eccentrico (E), il quale gira coll' indice (fissato all' asse medesimo), ed al quale s'appoggia una leva (DG oppure QD*i*). Questa è destinata a sostenere un piattino (*i*) in posizione orizzontale, finchè l'estremo inferiore della leva poggia su quei punti del contorno dell' eccentrico, i quali distano più degli altri dall' asse di questo medesimo: ma appena vengono sotto di essa leva i punti dell'eccentrico più vicini all' asse, il capo superiore della leva medesima si stacca, e lascia cadere il detto piattino (*i*). Finalmente riposa a cavalcioni sulla scanalatura della ruota (T) del tribometro un filo sottilissimo e leggerissimo di seta, il quale termina in due masse (M, M') del medesimo peso: una (M)

delle quali riposa sul piattino (*i*) sostenuto dalla leva (QD*i*) ed in procinto di cadere (come in figura), appena sia lasciato libero dalla leva medesima, appena cioè il pendolo principia ad oscillare.

5° E' chiaro che le masse (M, M'), bilanciandosi a vicenda, restano in equilibrio, qualunque sia l'altezza a cui sieno recate ; e che però anche quando una (M) di esse rimane abbandonata dal piattino (*i*) che cade, nulla si muoverà. Ma ove sopra una (M) di dette masse (fig. 89.) si posi un appendice (*m*) poco pesante, quella massa discenderà e l'altra (M') salirà. Tal movimento per altro dovrà essere assai lento: perchè la gravità o il peso della sola appendice (*m*) deve comunicare il moto a tutte e tre le masse (M, M', *m*).

Fig. 89.

6°. Ad esperimentare le leggi della caduta dei gravi per mezzo della macchina atvudiana, si ferma il pendolo, quando l'indice del quadrante sta per passare sullo zero, si colloca l'appendice (*m*) sopra una (M) delle due masse, e questessa si posa sul disco (*i*) tenuto dalla leva (QD) in posizione orizzontale incontro allo zero della scala. Dopo ciò il corsoio massiccio (B) si fissa su quel numero della scala, su cui si può ragionevolmente sospettare, che perverrà dopo un secondo, o al fine di una prima oscillazione del pendolo, la massa (M) che cade pel peso dell'appendice (*m*). Se la massa cadente (M) non colpisce il disco del corsoio nell'istante che termina il minuto, si muta posto al disco medesimo, finchè non si azzecca la perfetta coincidenza. Dopo si replicano i tentativi medesimi per fissare il corsoio proprio lì, ove perviene il mobile allo scoccare del secondo minuto; e così via dicendo. Quando ciò siasi ottenuto, non resta a fare altro, che leggere sulla scala gli spazii percorsi nei varii tempi dal mobile cadente.

7° A conoscere poi quanto sia lo spazio percorso con moto uniforme, in caso che la gravità sia sospesa; si fissa il corsoio anulare (A) in quel punto, a cui perviene il mobile dopo un secondo, e poi si colloca l'altro corsoio massiccio (B') a quell'altezza, a cui si suppone che perverrà il mobile dopo un'altra unità di tempo. Avverrà che la massa (M), nel passare per l'anello (A), dovrà abbandonare su questo l'appendice (m'), e poi seguiterà a discendere per la sola velocità preconcepita, finchè non incontrerà il disco (B'), sul quale sarà costretta a fermarsi. Dopo ciò dovrà collocarsi l'anello (A') dove perviene il mobile trascorsi che sieno due secondi, ed il disco (B'') dove può credersi che giungerà allo scoccare del quarto minuto secondo. La lettura dei centimetri della scala metterà a prova la legge.

8° Con questo metodo si dimostra che gli spazii percorsi con moto accelerato sono come i quadrati dei tempi; e che il mobile, abbandonato alla sola velocità preconcepita, percorre con moto uniforme uno spazio duplice di quello corso con moto accelerato.

9° Ma con questa macchina si misura anche assai bene l'intensità della gravità. Si richiami alla memoria (30.I,II.) che $v = gt$, e che $s = \frac{1}{2}vt$. Pongasi inoltre $t = 1$, ed avremo

$g = v$, ed $s = \frac{1}{2}v$; donde $v = 2s$; e finalmente

$$g = 2s.$$

A valutare dunque l'energia g della forza della gravità, non si à che a trovare il valore di s, ossia dello spazio percorso da un grave cadente liberamente nel vuoto. Ora questo spazio à con quello percorso dalla massa (M) della macchina atwudiana un rapporto, che può facilmente conoscersi. Infatti, se cadesse la sola appendice m, la sua quantità di moto sarebbe mg: muovendosi invece tutte e tre le masse, cioè M, M', ed m, per la forza impressa dalla sola appendice m, la quantità di moto sarà la stessa; e quindi sarà ben diversa la velocità. Chiamiamo dunque x questa velocità, e po-

tremo stabilire che $x(M+M'+m)=mg$; e fatto $M=M'$, sarà $x(2M+m)=mg$, ed $x=\frac{mg}{2M+m}$. Se si supponesse, a cagion d'esempio, $m=1$, ed $M=16$, sarebbe $x=\frac{g}{33}$. Il che significa che la velocità sarà 33 volte minore di quella che à un corpo, il quale cade liberamente.

10° Con esperienze di questo genere si è dimostrato, che un corpo abbandonato a sè stesso nel primo minuto secondo percorre qui in Roma metri 4,9013. Per lo che il valore di g, o della forza acceleratrice della gravità, per Roma è metri 9,8026. Ma nelle altre latitudini la gravità è diversa: anzi da accurate esperienze risulta che all'equatore $g=9,7808$. Onde, confrontando questi valori, può dedursi che ai poli $g=9,8312$.

32. Ascendimento verticale dei gravi. — Su questo può facilmente dimostrarsi una tesi, donde traggonsi parecchi corollarii.

I. PROPOSIZIONE. *Un grave che, per una velocità datagli, ascende verticalmente nel vuoto, dopo un dato tempo rimane con una velocità uguale alla differenza fra la iniziale e quella, che nel tempo stesso la gravità attribuisce ai gravi cadenti.*

Dichiarazione. La verità di questa proposizione è per sè stessa manifesta. Infatti chiamisi V la velocità impressa al grave nel senso verticale, ossia direttamente opposto alla gravità; si dica t il tempo dato, ed u la velocità che dopo quel tempo gli rimane. Evidentemente il mobile continuerebbe ad essere animato perpetuamente della stessa velocità V, se la gravità non agisse in senso inverso: cioè in tale ipotesi astratta sarebbe sempre $u=V$, come è di fatto nel principio del moto. Ma poichè in realtà l'attrazione terrestre dà al grave continui impulsi, per farlo cadere, e questi s'oppongono direttamente al suo salire; così dopo un certo tempo la velocità residua u non sarà più tutta la V, ma questessa diminuita di tutta la velocità impressa nel tempo stesso dall'attrazione della Terra. Ora, come sappiamo (**30.** II. 1°) nel

tempo t la gravità attribuisce una velocità $v=gt$. Dunque in fatto

$$u=V-gt.$$

II. COROLLARII. 1° Dunque il moto di un grave, che sale verticalmente, sarà uniformemente ritardato. Giacchè nelle singole unità di tempo la gravità gli leva la stessa velocità, che gli imprimerebbe se cadesse liberamente.

2° Dunque il grave cesserà di ascendere dopo un tempo uguale al rapporto fra la velocità iniziale e la forza acceleratrice della gravità. Dacchè evidentemente il grave finisce di salire quando $u=0$, ossia quando $V-gt=0$; ed allora $V=gt$; e perciò

$$t=\frac{V}{g}.$$

3° Dunque per far salire verticalmente un corpo ad una data altezza, gli si deve dare una velocità iniziale pari a quella, che acquisterebbe col cadere liberamente dall' altezza medesima. Giacchè allora esso cessa di salire, quando la velocità iniziale è tutta elisa dall'azione della gravità. Ma questa toglie al grave ascendente gli stessi gradi di velocità, che gli darebbe, se cadesse liberamente. Dunque se, a fare ascendere un grave ad una data altezza, gli si desse minor velocità di quella che esso acquisterebbe discendendo dall'altezza medesima, dovrebbe ascendendo perdere maggior velocità di quella ricevuta inizialmente. Ma quando à perduta una velocità uguale alla ricevuta, già si ferma. Dunque non arriverà colassù, ove si volea. Se poi gli si desse maggior velocità, giunto all' altezza voluta non avrebbe ancor perduta tutta la velocità iniziale, e seguirebbe a salire più su di quello che si pretendeva. E poi, tanto (**30.** II. 1°) $v=gt$, come (2°) $V=gt$. Quindi

$$V=v.$$

4° Dunque l'altezza, a cui sale verticalmente un grave in virtù di una velocità iniziale, è uguale all' altezza, da cui dovrebbe discendere per acquistare la detta velocità. Imperocchè, se il grave fosse in balìa della sola velocità iniziale V, nel tempo t salirebbe con moto uniforme (**29.**) all' al-

tezza Vt: per converso, se durante il tempo stesso si trovasse senza verun ratteuto in balia della sola gravità, discenderebbe (**30.** II. 3°) per uno spazio uguale ad $\frac{1}{2}gt^2$. Dunque per la combinazione delle due forze nel tempo stesso salirà ad un'altezza, cui diremo a, uguale alla differenza dei due detti spazii; ossia

$$a = Vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ma (2°) $V = gt$. Dunque $a = Vt - \frac{1}{2}gt^2 = gt^2 - \frac{1}{2}gt^2$. Cioè

$$a = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ora la stessa quantità (**30.** II. 2°) rappresenta lo spazio s, da cui deve cadere un grave per acquistare la velocità v, e questa (3°) è uguale all'iniziale: dunque

$$a = s.$$

5° Dunque il tempo, che impiega un grave a salire ad una certa altezza verticale in virtù di una velocità iniziale, è uguale al tempo, che dovrebbe impiegare cadendo per acquistare la detta velocità. Dacchè, essendo stato dimostrato (**30.** II. 2°) che nella discesa verticale dei gravi $s = \frac{1}{2}gt^2$, potremo dire $t^2 = \frac{2s}{g}$: e perciò il tempo richiesto per la discesa con moto uniformemente accelerato sarà $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$. Ora essendo (4°) $a = \frac{1}{2}gt^2$, sarà anche $t^2 = \frac{2a}{g}$; e quindi il tempo richiesto a salire con moto uniformemente ritardato sarà

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Ma $a = s$, come sappiamo (4°). Dunque ecc.

33. Discesa dei gravi pei piani inclinati. — Già conosciamo (**20.** I.) che cosa s'intenda per piano inclinato, per base ed altezza del medesimo, e per gravità assoluta e relativa. Non ci rimane adunque che aggiungere altre due definizioni, per entrare senza più in materia.

I. DEFINIZIONI. 1ª Il moto di un corpo, cui non s'oppone verun ostacolo, si chiama *libero*.

2ª È detto invece moto *impedito* l'opposto; per esempio, quello di un grave, che scorre per un piano inclinato.

II. PROPOSIZIONE. *La gravità relativa, onde un corpo discende per un piano inclinato, è uguale al prodotto della gravità assoluta pel seno dell'angolo formato dal detto piano coll'orizzonte.*

Dimostrazione. Sia ABC (fig. 90.) la sezione verticale di un piano inclinato, su cui sta cadendo (senza verun rattento opposto dall'aria o dall'attrito) un grave MN; la verticale GR ne rappresenti la gravità assoluta; e questa venga decomposta nella pressione GP, e nella gravità relativa GQ parallela al piano, la quale ultima solamente (**20.** III.) sarà efficace. Inoltre chiamisi g la gravità assoluta, g' la relativa, ed α l'angolo ABC formato dal piano coll'orizzonte. Ora la GQ è evidentemente seno dell'angolo GRQ relativamente al raggio GR. Ossia GQ = GR sen. GRQ. Ma GRQ = ABC = α; GQ = g'; GR = g. Dunque

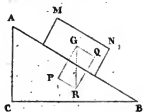



Fig. 90.

$$g' = g \text{ sen. } \alpha.$$

III. COROLLARII. 1° Dunque la gravità relativa è una forza non solamente continua, ma anche costante. Dacchè è costante tanto l'assoluta g, quanto l'angolo α formato dal piano coll'orizzonte.

2° Dunque il moto di un grave, che scende per un piano inclinato, è uniformemente accelerato. Mentre tale è l'effetto di una forza costante e continua.

3° Dunque al moto di un grave, che discende per un piano, sono applicabili le stesse formule che furono stabilite (**30.I,II**) per la gravità assoluta. Infatti quelle formule valgono per ogni forza costante e continua: varranno dunque anche per la gravità relativa. L'unica variazione, che potrà indursi in esse, sarà la sostituzione di g' al g, e del valore or ora ritrovato (II) al g'. Insomma

$$v=g't\,;\quad s=\frac{g't^2}{2}\,;\quad v^2=2.g's;$$

$$v=g\,t.\text{sen.}\,\alpha\,;\quad s=\frac{gt^2.\text{sen.}\,\alpha}{2}\,;\quad v^2=2.gs.\text{sen.}\,\alpha\,.$$

4° Dunque nel tempo, in cui un grave cadendo liberamente arriva ad un dato punto dell'altezza del piano, un altro discendendo pel piano giungerà fino all'incontro della retta innalzata dal detto punto normalmente alla lunghezza del piano. Sia D il punto (fig. **91**) a cui giunge in un dato tempo il grave che cade liberamente, ed E sia quello a cui perviene cadendo impeditamente sul piano. Certo è che $AD=\frac{gt^2}{2}$, ed $AE=\frac{gt^2.\text{sen.}\,\alpha}{2}$. Onde $\frac{AE}{\text{sen.}\,\alpha}=\frac{gt^2}{2}$: e però $\frac{AE}{\text{sen.}\,\alpha}=AD$, ed anche $AE=AD\,\text{sen.}\,\alpha$. È dunque la EA seno dell'angolo ADE relativamente al raggio AD: e però è parimenti cateto di un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è AD. Dunque il punto (E), a cui perviene un grave, dopo essere disceso in un certo tempo per la lunghezza (AE) del piano inclinato, è determinato dalla normale (DE) condotta alla lunghezza stessa dal punto (D), a cui esso perviene cadendo nel tempo stesso per l'altezza (AD).

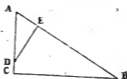



Fig. 91.

5° Dunque un grave, che discende per un piano inclinato, à in ogni punto, a cui perviene, la velocità stessa che avrebbe, se ivi fosse caduto verticalmente. Imperocchè tale velocità è data da $v'^2=2g.AB.\text{sen.}\,\alpha$. Ma poichè $AC=AB.\text{sen.}\,\alpha$.

sarà $v'^2 = 2g.\,AC$. Ora la velocità dei corpi che cadono liberamente è data da $v^2 = 2gs$, e nel caso nostro $s = AC$. Dunque $v^2 = 2g.\,AC$. Perciò

$$v' = v.$$

6° I tempi, impiegati a cadere per l'altezza e per la lunghezza del piano, stanno fra loro come l'altezza sta alla lunghezza medesima. Dacchè indicando con t, e t' i tempi delle cadute, e rammentando che $v = gt$, e $v' = g't'$, e che $v = v'$, sarà $gt = g't'$: onde $g : g' :: t' : t$. Ma $g : g' ::$ AB : AC. Dunque $t : t' ::$ AC : AB.

7° Pongasi che dall'estremo superiore del diametro verticale di un cerchio solido, tenuto in un piano parimenti verticale, partano più fili metallici; i quali, a guisa di tante corde geometriche vadano a diversi punti della circonferenza; e di più a ciascun di essi sia infilata una palletta pesante traforata per mezzo. Ove tutte queste sferette sieno portate nel punto, da cui quei fili si diramano, e poi vengano tutte ad un tempo abbandonate a sè stesse, giungeranno nel medesimo istante ai varii punti della circonferenza, a cui pervengono i detti fili. Giacchè questi rappresentano altrettanti cateti di angoli retti, l'ipotenusa comune dei quali è il diametro o filo verticale.

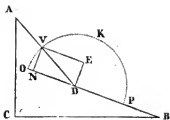



Fig. 92.

8° Dunque la velocità di un mobile, che discende per una curva, è in ciascun punto uguale a quella che esso avrebbe, se ivi fosse disceso verticalmente. Poniamo primieramente che un grave passi da un piano AD (fig. 92.) ad un altro DB; e rappresentisi per DV la velocità che esso à acquistato, quando arriva in D. Il grave nel passare che fa all'altro piano DB non conserverà la medesima velocità. Dacchè prolungando questo piano verso DO, e decomponendo la VD in due, una VN perpendicolare al secondo piano, e l'altra VE parallela

al medesimo, è chiaro che tutta la VN (prescindendo da ogni elasticità) sarà elisa nel colpire il piano. Rimarrà dunque al grave la sola velocità VE = ND. Fatto pertanto centro in D, e coll'apertura DV descritto l'arco OVKP, la retta ON, che è il senoverso dell'angolo VDO formato dai due piani consecutivi, rappresenterà la perdita di velocità nel passaggio da un piano all'altro. Onde apparisce esser falso che un grave, il quale passa per più piani contigui, abbia dovunque la velocità stessa che ivi avrebbe, se vi fosse caduto verticalmente. Ma questa proposizione è verissima, ove il grave discenda per una curva. Imperocchè in tal caso non solo la perdita NO di velocità nel trapasso da un pianetto brevissimo all'altro contiguo, ma la somma di un numero indefinito di queste perdite è così piccola, che può trascurarsi senza sensibile errore. E qui si avverta che i Matematici chiamano *infinitesima* una quantità più piccola di qualsivoglia assegnabile; cosicchè se ne richiegga un numero infinito per formare una quantità finita, e tale quantità rappresentano per $\frac{1}{\infty}$.

Ma i medesimi parlano di certe altre quantità di una piccolezza anche infinitamente maggiore, delle quali se ne domandi un numero infinito per costituire una quantità infinitesima. Ognuna di esse rappresentano quindi per $\frac{1}{\infty\times\infty}=(\frac{1}{\infty})^2$, e chiamano *infinitesima di second'ordine* per distinguerla da $\frac{1}{\infty}$, cui dicono *infinitesima di prim' ordine*. Ciò premesso, si noti che in una curva l'angolo VDO, formato da due piani consecutivi, è infinitesimo; ed è infinitesimo per conseguenza anche il suo seno VN: ma in tal caso il senoverso ON è infinitesimo di second'ordine. Dappoichè può concepirsi un triangolo OVP, il quale avendo per base il diametro OP sarà rettangolo in V. Ma la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa è media proporzionale fra i segmenti di questa. Dunque ON : VN :: VN : NP. E chiamando α l'angolo VDO, questa proporzione si tradurrà

in senov. α :sen. α :: sen. α :NP. Quindi se sen. α è infinitesimo verso NP, anche senov. α sarà un infinitesimo di sen. α. Ma sen. α è infinitesimo di prim' ordine, sarà dunque infinitesima di second' ordine la quantità senov. α. E poi dalla proporzione stessa risulta che senov. $\alpha = \frac{\text{sen}^2.\alpha}{NP}$. Ora siccome sen. $\alpha = \frac{1}{\infty}$; così sen.$^2 \alpha = (\frac{1}{\infty})^2$. E però senov. $\alpha = (\frac{1}{\infty})^2$.

34. Pendolo. — I. DEFINIZIONI. 1ª Si denomina *pendolo* un grave sospeso e mobile intorno ad un asse orizzontale.

2ª Un punto pesante, che s'imagina sostenuto da un filo inestensibile, senza peso, a mobile intorno e un punto fisso, costituisce ciò che chiamasi pendolo *semplice*, o *ideale*.

3ª È detto invece *pendolo composto* quello, il cui filo è dotato di peso; oppure non lo è, ma sostiene a diverse altezze più d'un punto pesante.

4ª Il punto fisso viene denominato *centro di sospensione*.

5ª Il moto che concepisce il pendolo al di qua e al di là della verticale, quando sia ritolto dalla sua posizione d'equilibrio, si contraddistingue coll'epiteto di *oscillatorio*.

6ª È chiamata *oscillazione* quella parte del moto del pendolo, la quale è compiuta dal momento, in cui esso principia a discendere, fino a quello, nel quale finisce di salire.

7ª Dicesi poi *semioscillazione* il moto, pel quale il pendolo scorre dalla obliqua, donde discende, fino alla verticale.

8ª Si denomina *ampiezza di oscillazione* l'angolo formato in una oscillazione dalle due posizioni estreme del filo.

9ª Siccome in un pendolo composto le masse o le particelle pesanti del filo più prossime al centro di sospensione sono ritardate nel loro moto dalle più remote, e queste sono rese più celeri da quelle; così vi è un punto intermedio, che dondola come se fosse libero. Questo punto è detto *il centro di oscillazione*.

10ª In un pendolo semplice si chiama *lunghezza* la distanza che passa fra il centro di sospensione ed il peso.

11ª In un pendolo composto dicesi *lunghezza* la distanza fra il centro d'oscillazione ed il centro di sospensione.

II. PROPOSIZIONI. 1ª *In ogni oscillazione il moto del pendolo prima è difformemente accelerato, e poi è al modo stesso ritardato.*

Dichiarazione. Consideriamo un pendolo semplice C M (fig. 93.) ; e prescindiamo da ogni resistenza al moto. Innanzi tutto premetteremo , che se esso non trovasi col suo filo nella direzione CM della gravità, ma su di una linea obliqua CK, dovrà muoversi: perchè in tal caso la forza della gravità, che anima il punto ponderabile M, non è del tutto paralizzata dalla resistenza del punto fisso. Infatti la detta direzione venga rappresentata da KP, e la sua intensità sia misurata da KA: inoltre questa KA si decomponga in due forze, una delle quali operi nella direzione KB del filo, e l'altra KD riesca normale alla prima. Poichè si suppone che il filo non si trovi nella direzione della gravità, KB sarà differente da KA, e l'altra componente KD avrà un valore apprezzabile. Ma la sola KB è elisa dalla resistenza del filo, e del punto fisso: resta dunque efficace la KD. Dunque il pendolo si muoverà in virtù della componente KD. A ritrovare il valore di questessa si avverta, che la KD è seno dell'angolo DAK relativamente al raggio AK. Ciò posto, questa AK chiamisi g, e si denoti con α l'angolo DAK=AKB=MCK, cioè l'angolo formato dal filo CK colla CM. Avremo DK=g.sen. α. E poi evidentemente la DK è la gravità relativa, e questa, come sappiamo (**33.** II.), è uguale al prodotto che s'ottiene, moltiplicando la gravità assoluta pel seno dell'angolo formato dalla direzione della stessa gravità assoluta con quella della pressione. Ma se g è una forza costante, non è costante l'angolo α, il quale diviene tanto più piccolo, quanto più il filo CK s'approssima alla verticale. Dunque il moto del punto ponderabile, perchè si avvia verso la retta giacente nella direzione della gravità, sarà bensì accelerato, perchè è animato da una

Fig. 93.

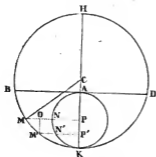
fòrza continua; ma non uniformemente, perchè questa forza continua non è costante. Giunto peraltro il grave sulla CM dovrà risalire dall' altra parte all' altezza medesima. Imperocchè il moto di un pendolo è analogo a quello di un corpo, che discende per un arco circolare resistente. Ora un grave, che discende per un tale arco, à da per tutto (**33.** III. 8°) la velocità stessa, che ivi avrebbe acquistata cadendovi per una verticale; e la velocità che viene conferita dalla gravità è appunto (**32.** II. 3°) quella che fa risalire il grave all' altezza medesima, da cui esso discese. Dunque il pendolo risalirà dall'altra parte fino a CH simmetrica a CK. E siccome nella salita la gravità sottrae coll' ordine stesso i medesimi gradi di velocità, che conferì nella discesa; così il pendolo, ripassando per i successivi decrementi di velocità ugualmente difformi, andrà a fermarsi un istante sulla CH. Dove giunto, si troverà evidentemente nella condizione stessa, in cui trovavasi al principio della oscillazione: e però nella successiva oscillazione si ripeterà esattamente il fenomeno stesso.

Fig. 94.

2ª *Le oscillazioni del pendolo per un arco piccolissimo sono isocrone.*

Dichiarazione. La tesi afferma che, a parità di lunghezza del filo, ma a disparità di ampiezza delle oscillazioni, il tempo impiegato a compir queste è sempre il medesimo.

Dimostrazione. Sia BKD (fig. 94.) l' arco circolare assai piccolo da percorrersi dal pendolo intorno al punto di sospensione C; BAD ne sia la corda sottesa; ed HK rappresenti il diametro verticale appartenente al circolo HDKBH, di cui è arco la linea BKD. Inoltre si prenda in BKD un archetto piccolissimo MM'; e tanto da M come da M' si abbassino le perpendicolari MP, M' P' sul diametro HK. Chiamando t il tempo impiegato a percorrere MM', ed u la ve-

locità da esso acquistata in M, siccome può supporsi che MM′ sia percorso con moto uniforme; così potrà dirsi che $t = \frac{MM'}{u}$. Facendoci ora a cercare il valore di u, si noti che (**33**. III. 8°) BM può considerarsi come la lunghezza di un piano inclinato, la cui altezza sia AP; e si richiami alla memoria, che (**33**. III.5°) nel piano inclinato $v = \sqrt{(2ag)}$; e però nel caso nostro $u = \sqrt{(2g.AP.)}$. Dal che si conclude che $t = \frac{MM'}{\sqrt{(2.g.AP)}}$. Cerchiamo ora il valore di MM′. A questo scopo si conduca il raggio CM, e da M′ s' innalzi la M′O parallela ad HK. Si otterranno due triangoli CMP, ed MOM′ simili, perchè costituiti da lati rispettivamente perpendicolari. Per la qual cosa $MM' : M'O :: MC : MP$, ed essendo $M'O = PP'$, $MC = CK = r$, certamente $MM' : PP' :: r : MP$; e quindi $MM' = \frac{r}{MP} . PP'$. Quanto al MP, è cosa nota che $\overline{MP}^2 = HP \times PK$. Or nel caso di BKD piccolissimo, può ad HP sostituirsi HK; però $\overline{MP}^2 = HK \times PK = 2CK.PK = 2r.PK$, ed $MP = \sqrt{(2r.PK)}$. Dunque la $MM' = \frac{r.PP'}{MP}$ si cangerà in

$$MM' = \frac{r.PP'}{\sqrt{(2r.PK)}} = \frac{PP'.r.\sqrt{r}}{\sqrt{r}.\sqrt{r}.\sqrt{(2.PK)}} = \frac{PP'.r.\sqrt{r}}{r.\sqrt{(2.PK)}} = \frac{PP'.\sqrt{r}}{\sqrt{(2.PK)}}.$$

Sostituendo questo valore nella superiore equazione, s' avrà

$$t = \frac{PP'.\sqrt{r}}{\sqrt{(2g.AP)}.\sqrt{(2PK)}} = \frac{PP'.\sqrt{r}}{\sqrt{(4g.AP.PK)}} = \frac{PP'}{2\sqrt{(AP.PK)}}.\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

A rintracciare ora il valore della $\sqrt{(AP.PK)}$, si descriva un circolo che abbia per diametro AK, e che tagli col punto N la perpendicolare MP. È noto che $\overline{NP}^2 = AP \times PK$, e però $\sqrt{(AP \times PK)} = NP$. Per conseguenza sarà $t = \frac{PP'}{2.NP}.\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Dopo tutto ciò si avverta, che come $MM' = \frac{r}{MP}.PP'$, così

$NN' = PP' . \frac{\frac{1}{2} AK}{NP}$; e però $\frac{NN'}{AK} = \frac{PP'}{2.NP}$; e $PP' = \frac{2NP}{AK} . NN'$.

Ond' è che $t = \frac{2NP}{AK} \times \frac{NN'}{2NP} . \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{NN'}{AK} . \sqrt{\frac{r}{g}}$.. Or bene: la stessa dimostrazione à luogo per ognuno dei minimi latercoli di BMK. Raccolta pertanto la somma di tutti, e chiamando T il tempo impiegato dal grave a percorrere la BKD, sarà $\frac{T}{2} = \frac{ANK}{AK} . \sqrt{\frac{r}{g}}$, e $T = \frac{ANKA}{AK} . \sqrt{\frac{r}{g}}$. Ma tutti sanno che $\frac{ANKA}{AK}$ si rappresenta per π: quindi $T = \pi . \sqrt{\frac{r}{g}}$. Or questa equazione non contiene la quantità AK, da cui dipende l'estensione dell'arco di oscillazione. Per conseguenza le oscillazioni molto ristrette sono isocrone.

III. COROLLARII. 1° Dunque il filo a piombo segna la verticale. Infatti il filo a piombo non è in fine che un pendolo in equilibrio; e, come abbiamo provato or ora nella proposizione prima, il filo d'un pendolo in equilibrio giace nella direzione della gravità. Rammentiamoci ora ciò che si dimostrò nella Sezione prima della Parte sperimentale (**38.** II. 1°), che cioè la direzione della gravità è secondo la verticale. Donde s'inferisce che seguirà la direzione della verticale anche il filo a piombo. Di più, anche nella Parte prima (**14.** II. 6°) abbiamo dimostrato, che la direzione della gravità, nell'ipotesi della perfetta sfericità della Terra, è rappresentata dalla prolungazione del raggio terrestre, ossia dalla verticale: e questo è vero, almeno ad un di presso, ancorchè la Terra sia, com'è di fatto, una sferoide. Ma da quanto abbiamo qui dimostrato risulta, che il filo a piombo in equilibrio giace nella direzione della gravità. Dunque il filo a piombo segna la verticale.

2° Dunque, rimosso ogni ostacolo, le oscillazioni del pendolo sono perpetue. Altro corollario, che emerge spontaneo dalla proposizione prima.

3° Dunque la gravità è la stessa per tutte le sostanze di-

verse, e tutti i corpi debbono cadere colla stessa velocità. Imperocchè, come si scorge nella formula sopra stabilita, T è indipendente affatto dalla massa e dal peso specifico.

4° Dunque, conosciuto il tempo di una oscillazione, è conosciuta eziandio l'energia della gravità. Avvegnachè, essendosi ritrovato nella dimostrazione della proposizione seconda che $T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, potremo anche dire $T^2 = \frac{\pi^2 r}{g}$, e $g = \frac{\pi^2 r}{T^2}$. Perciò, essendo stato dall'esperienza determinato il valore di T, si è potuto sapere che g vale piedi parigini 30, 2.

5° Dunque l'intensità della gravità è direttamente proporzionale alla lunghezza del pendolo, che in diverse latitudini compie nel tempo stesso un medesimo numero di oscillazioni. Infatti poichè $g = \frac{\pi^2 r}{T^2}$, sarà $g : g' :: \frac{\pi^2 r}{T^2} : \frac{\pi^2 r'}{T'^2} :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$. Ma per ipotesi $T' = T$. Dunque $g : g' :: r : r'$.

6° Dunque la durata delle oscillazioni per archi minimi sta nella ragione diretta della radice quadrata della lunghezza del pendolo, ed inversa della radice quadrata della gravità. Poichè chiamati T, T' i tempi delle oscillazioni di due pendoli, r ed r' le loro lunghezze, g e g' le gravità diverse, dalle quali possono essere animati, ove si trovino in latitudini differenti, potrà dirsi che $T : T' :: \pi \sqrt{\frac{r}{g}} : \pi \sqrt{\frac{r'}{g'}} :: \sqrt{\frac{r}{g}} : \sqrt{\frac{r'}{g'}}$. Ond'è che un pendolo di lunghezza quadrupla di un altro compie nel tempo e sito stesso una metà (in numero) di oscillazioni; ed un pendolo, che in una data altezza o latitudine fa nel tempo medesimo il doppio di oscillazioni che in un'altra altezza o latitudine, colà è animato da quadruplice gravità.

IV. scolii. 1° Questi risultati teorici non potrebbero realizzarsi che in un pendolo semplice. Ma in fatto ogni pendolo è composto, perchè il suo filo costa sempre di particelle pesanti poste a varie distanze dal centro di moto, le quali oscillano insieme, perchè sono connesse fra loro. Ciò non ostante può il pendolo composto considerarsi come un pendolo semplice, purchè se ne determini la vera lunghezza

(**34.** I. 11ª). Ora tale lunghezza può conoscersi almeno per approssimazione. Si prenda un pendolo poco differente da uno semplice, come quello di *Borda*, che è formato da una lente assai pesante di platino appesa al più sottil filo, che possa sostenerla, ed è scorrevole lungo il filo. Quindi si faccia oscillare il pendolo composto, di cui si cerca la lunghezza, e alle sue oscillazioni si rendano sincrone quelle del Borda col variarne la lunghezza. Questa è la lunghezza cercata. Or bene: da accurate e molteplici osservazioni risulta che la lunghezza del pendolo a secondi è alla latitudine 45° millimetri 993,5; all'equatore 991, allo Spitzberg, cioè alla latitudine quasi 80°, è 996. Il che mostra come diminuisca il peso colle latitudini; e concorda con ciò che fu detto nella Prima Sezione della Parte sperimentale (**19.** III. 3ª).

Fig. 95.

2° È cosa conosciuta che una delle più gravi difficoltà da superarsi, affinchè gli orologi sieno esatti, è quella di farli procedere con moto equabile e sempre uniforme. Or bene: scoperto che fu da Galileo l'isocronismo del pendolo, Huyghens propose nel 1657 di applicarlo come regolatore agli orologi fissi; e pochi anni appresso fu ingranata alle ruote degli orologi portatili un'altra ruota, chiamata *bilancere*, la quale oscillando intorno al suo perno ne moderasse il movimento [1].

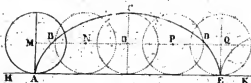



Fig. 96.

1 Questo isocronismo suppone la costanza nelle dimensioni sia del pendolo, sia del bilancere: dacchè se in estate l'asta del pendolo ed il raggio del bilancere si allungano, le oscillazioni loro saranno meno frequenti, e ne sarà ritardato il moto della macchina: viceversa in inverno. È a questo difetto che s'intende por riparo per mezzo dei così detti *pendoli a compensazione* e delle *lamine* chiamate *compensatrici*. Per intenderne l'utilità conviene principiare dall'avvertire che, quando la lente

3° Le oscillazioni del pendolo ordinario, vale a dire circolari, sono isocrone solo nel caso di archi assai piccoli; ma quelle per archi cicloidali sono isocrone qualunque ne sia l'ampiezza. È la cicloide (fig. 96.) una curva piana (ABCDE) generata dal moto di un punto (A) di una circonferenza circolare, la quale senza uscire dal suo piano e senza strisciare ruzzola sopra una linea retta (HK); che si chiama la base. Questa curva è detta *brachistocrona*, perchè è quella cui deve percorrere un mobile (fig. 98.) per impiegare il più breve

o la massa pesante del pendolo è greve assai, può considerarsi come nullo il peso dell'asta; e però il centro di gravità (**10.**) del pendolo coinciderà col centro di figura della lente. Per la qnal cosa nel centro stesso di figura starà il centro di oscillazione (**34.** I. 9°); e la lunghezza (**34.** I. 11°) vera del pendolo dovrà variare, a seconda che si solleva o si abbassa il centro di figura della lente, o il centro di gravità del sistema.

Un metodo bastantemente semplice è quello della *compensazione a mercurio*, proposto da Graham. Consiste esso (fig. 95.) nel sostituire alla lente del pendolo un vase cilindrico, nel quale si colloca tanto idrargiro, che il centro d'oscillazione del pendolo coincida, quanto più esattamente si può, col punto medio della colonna del liquido. Ora col dilatarsi dell'asta che porta il detto vase, il fondo di questo e per conseguenza anche l'idrargiro e il centro d'oscillazione tende ad abbassarsi; ma poichè frattanto il livello del liquido per la sua dilatazione tende a sollevarsi, così può ottenersi che tale sollevazione sia doppia dell'abbassamento del fondo del vaso. Allora il centro di gravità del mercurio rimarrà alla stessa distanza dal centro di sospensione, e la lunghezza del pendolo non sarà alterata.

Fig. 97.

Giuliano Leroy a proposto un compensatore (fig. 97.) sufficientemente esatto e non molto complicato. Da un piano fisso (P) si solleva un tubo di rame, superiormente chiuso da un disco (K), a cui è saldata un'asta di ferro (F): a quest' asta è raccomandata la lamina d'acciaio sottile e flessibile (S), la quale porta l' asta di ferro (F') del pendolo. Quando la temperatura s'innalza, il tubo di rame s'allunga, ed il suo cielo (K) non che il pendolo si solleva. Ma la dilatazione delle due aste di ferro lo fa abbassare. Se la lunghezza del tubo è circa due terzi della lunghezza totale delle due aste di ferro; ivi sarà giusta compensazione: perchè il coefficiente di dilatazione del ferro è pressappoco due terzi di quello del rame.

Sembra più esatta di ogni altra la compensazione del *pendolo a te-*

tempo a discendere dal suo punto (A) più alto al più basso (B); ed è anche denominata *tautocrona*, perchè (come à dimostrato Huyghens, e può vedersi col fatto) un mobile, per arrivare al punto più basso (B) di una cicloide a base orizzontale, impiega lo stesso tempo, qualunque ne sia il punto (M, od N) di partenza. Perciò lo stesso Huyghens propose di far descrivere al pendolo un arco di cicloide, sospendendolo (fig. 99.) con una lamina metallica flessibilissima fra due pezzi (OP, OQ) tagliati in forma di cicloide, in guisa che la lamina applicandosi sulla loro superficie ne

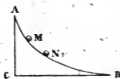



Fig. 98

luio (fig. 100.), che si dice imaginato da Harrisson. Facciamo che dal punto di sospensione del pendolo parta una sottil lamina (*a*) flessibile di acciaio, e questa porti un rettangolo (*bopd*) costituito da due lunghi fili inflessibili verticali (*bo*, *dp*) di ferro saldati a due brevi sbarre orizzontali (*db*, *po*) di ottone, sulla inferiore (*p o*) delle quali si sollevino due simili fili di ottone congiunti superiormente con una breve sbarra (*e c*) di ottone; e che dal mezzo di questa (*ec*) discenda il filo, a cui è raccomandata la lente (L). Siamo in un caso assai analogo a quello del compensatore di Leroy. Il riscaldamento farà allungare i due fili laterali (*dp*, *bo*) di ferro; ma la lente non si abbasserà, perchè non è raccomandata ad essi; si abbasserà invece l'asta orizzontale (*po*) di ottone: e come questa porta due fili inflessibili di ottone, i capi inferiori di questi fili verranno parimenti in basso. Ma questi dilatandosi essi pure solleveranno l'asta di ottone (*ec*). Dappoichè per altro da questa pende, come supponiamo, il filo verticale di ferro, a cui è appesa la lente (L), questesso verrà ad allungarsi e tenderà a fare abbassare la lente medesima. Ma qui la lunghezza del ferro è doppia di quella dell'ottone; stanno dunque le lunghezze nella ragione inversa delle dilatabilità. In altri termini se la dilatazione dell'ottone fosse esattamente il doppio di quella del ferro, l'asta (*ec*) portata dai fili di ottone tenderebbe a sollevarsi il doppio di quanto si deprime quella (*po*) fissata ai fili di ferro. Ond'è che, abbassandosi i capi inferiori (*p*, *o*) dei fili di ottone la metà di quello, che si sollevino i capi superiori (*e*, *c*) dei medesimi; la vera sollevazione dell'asta superiore di

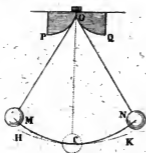



Fig. 99.

debba assumere la curvatura. Infatti risulta dalle proprietà di questa curva che, se il cerchio generatore delle due cicloidi (OP, ed OQ) à per diametro la metà della lunghezza del pendolo, il centro d'oscillazione di questo descriverà esso pure una cicloide; e così le sue oscillazioni anche molto estese saranno isocrone.

35. Moto dei gravi proietti. —

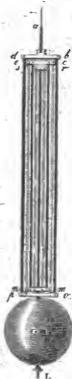
I. DEFINIZIONI. 1ª Un grave, quando è lanciato comunque nello spazio da una forza istantanea, si chiama *proietto*.

2ª La potenza, che lancia il proietto, si denomina *forza di proiezione*.

ottone sarà uguale alla depressione della inferiore. Ma di quanto essa si solleva, di altrettanto si allunga l'asta mediana di ferro. Dunque il capo inferiore di quest'ultima, e con esso la lente, rimangono al posto loro, ossia alla stessa distanza dal punto di sospensione. Ad ottenere per altro una più esatta compensazione, si è pensato di replicare altre due volte questo stesso artificio. Il perchè dalla sbarra (*ec*) superiore non discende il filo, che porta la lente, ma sono saldati due altri fili di ferro; e questi portano una seconda sbarra (*nm*) inferiore, dalla quale si sollevano altri due fili di ottone, che per mezzo di una terza sbarra (*sr*) superiore sostengono il filo, a cui è raccomandata la lente (L).

Il metodo più semplice di compensazione è quello del Barone di Zach. Consiste questo nel fare l'asta del pendolo non di metallo, che sarebbe assai dilatabile, ma di legno di abete diseccato al forno, imbevuto di olio di lino, e poi acconciamente verniciato. Siccome i legni ànno una dilatabilità assai debole, e d'altra parte nell'estate col diseccarsi tendono ad accorciarsi, e per converso nell'inverno s'inumidiscono e però piuttosto s'allungano; così è che, impedita in gran parte quest'azione igrometrica colle sopraddette precauzioni, le dimensioni di una cosiffatta asta di legno potranno mantenersi costanti. Questo pendolo pel suo discreto valore porta il nome di *pendolo del povero astronomo*.

Fig. 100.

Le *lamine compensatrici* sono fondate sul principio stabilito nella Parte sperimentale (**18**. V. 6° III.), che cioè un'asta formata di due metalli diversamente dilatabili ad ogni variazione di temperatura s'inarca; stabilendosene la convessità, nel caso di riscaldamento, dalla parte del metallo più dilatabile; dalla parte invece del men dilatabile, nel caso di

3° L'angolo (BPR), che fa (fig. 105.) la direzione della forza con una linea orizzontale (PR), chiamasi *angolo di proiezione.*

raffreddamento. Sia pure di metallo (fig. 102.) ed una sola (P) l'asta, che sostiene la lente; ma nel suo mezzo si saldi una seconda asta trasversale (*nm*) formata da due lamine, una d'argento, e l'altra di platino, congiunte insieme in guisa che l'argento rimanga nella parte inferiore. Inoltre l'asta medesima trasversale termini in due palle (*m,n*) ben pesanti. Sappiamo che (fig. 101.) quando al dilatarsi dell'asta verticale (P') si abbassa la lente s'incurverà la trasversale, offrendo la sua convessità alla lente: e così le due sfere (*m''* ed *n'*) si solleveranno. Viceversa al raccorciarsi pel freddo (fig. 103.) dell'asta verticale (P'') e sollevarsi della lente, s'inarcherà la trasversale in modo che le due sfere (*m''n''*) verranno a deprimersi. In ogni caso dunque, se tutto sia stato ben calcolato, il centro di oscillazione del sistema, il quale pel peso delle due sferette dee trovarsi

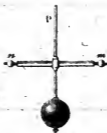



Fig.101. Fig.102. Fig.103.

più alto del punto medio della lente, potrà benissimo rimanere costantemente nel medesimo sito, (cioè sulla stessa retta CD parallela ad AB).

È questo artificio stesso che l'orivolaio Martin applicò pel primo al bilancere degli orologi portatili. A quattro punti equidistanti della circonferenza del bilancere medesimo si saldano (fig. 104.) quattro lamine compensatrici (*ab*) formate di argento e di platino, ponendo questo nella parte interna, e quello nella esterna. Alle lamine stesse sono annesse tante sferette di oro, le quali sono così pesanti, che in esse trovansi i centri di gravità, dai quali deve valutarsi l'ampiezza del raggio del bilancere. Col riscaldamento s'ingrandisce la circonferenza del bilancere, e questo principia ad oscillare più lentamente; ma allora le lamine si ripiegano e portano verso la circonferenza medesima le sferette pesanti. Quando invece il raffredamento impiccolisce il raggio del bilancere, la circonferenza di questo si ristringe, ed i punti, ai quali sono saldate le lamine compensatrici, s'avvicinano all'asse della ruota. Ma nel tempo stesso le lamine si svolgono e portano a maggior distanza dalla circonferenza le sfere pesanti, o per dir meglio, queste rimangono alla medesima distanza dall'asse della ruota: e per conseguenza le oscillazioni si mantengono isocrone.

4ª La linea (ACB, o ADG), percorsa dal centro del proietto, riceve il nome di *traiettoria*.

5ª Il puto (C) di massima elevazione, a cui giunge nel suo corso il proietto, si appella *punto culminante*.

6ª Si consideri una retta orizzontale (PG) indefinita passante pel punto (P), donde muove il proietto: la porzione (PB) di tal retta, che è frapposta tra il detto punto di partenza, e quello cui tocca il grave nel ricadere al suolo, à nome *ampiezza* o *portata del tiro*.

Fig. 104.

7ª Vien detta *altezza del tiro* la verticale (CV) abbassata dal punto culminante sull'ampiezza.

8ª È chiamata *Balistica* l'arte di determinare l'angolo di proiezione per ottenere una data altezza od ampiezza di tiro.

9ª Si dà nome di *parabola* ad una curva, che può concepirsi nata col tagliare un cono per mezzo di un piano parallelo ad uno de' suoi lati. La parabola (fig. 106.) può anche definirsi per quella curva piana (MVN), i cui singoli punti (V, H, ...) distano ugualmente sì da una retta (DI) come da un punto (F) preso fuori di questa (cioè $AV = VF$; $BH = HF$; ...).

Fig. 105.

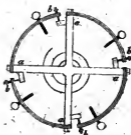
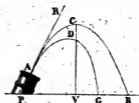
10ª Chiamasi *foco* il punto (F) soprannominato, e *direttrice* la detta retta (DI).

11ª La retta (AS) perpendicolare alla direttrice e passante pel foco à nome *asse*.

12ª Il punto (V), in cui l'asse coincide colla curva, dicesi *vertice*.

13ª Chiamasi *parametro* il quadruplo della distanza (VF), che passa fra il vertice ed il foco.

Fig. 106.

II. PROPOSIZIONE. *Un grave lanciato in alto nel vuoto descri-*

ve una parabola, il cui parametro è uguale a quattro volte l'altezza dovuta alla velocità di proiezione.

Dimostrazione. Si tracci la linea di proiezione RS (fig.107.) e si divida in porzioni RM, RN, RO,.... uguali fra loro, ed allo spazio, che percorrerebbe il grave nelle successive unità di tempo con moto uniforme per la sola forza di proiezione. Inoltre si tracci la verticale RG rappresentante la direzione della gravità, e si tagli in tali porzioni RE, RF, RG,... che stieno fra loro come 1:4:9:...; ed abbiano per unità lo spazio che percorre un grave nel primo tempo per la gravità. Poscia si compiano i parallelogrammi RA, RB,....; e condotta la diagonale RA, si congiunga A con B, B con C, C con D. È chiaro che il mobile dopo le singole unità di tempo si ritroverà in A, in B, in C,.... ossia verrà a descrivere la curva RABCD......; Or questa è una parabola. A restarne convinti si principii dal richiamare alla memoria che

$RM = vt$, e però $t = \frac{RM}{v}$; e che $v = \sqrt{(2gs)} = \sqrt{(2ga)}$,

chiamando a l'altezza da cui dovrebbe discendere il grave per acquistare la velocità di proiezione v: quindi $t = \frac{RM}{\sqrt{(2ga)}}$.

Ma sappiamo che $RE = \frac{g}{2}t^2$. Dunque $RE = \frac{g}{2} \times \frac{\overline{RM}^2}{2ga} = \frac{\overline{RM}^2}{4a}$;

e però $RE \times 4a = \overline{RM}^2$, e finalmente

$$\frac{\overline{RM}^2}{RE} = 4a. \qquad (\alpha)$$

Collo stesso ragionamento si prova che $\frac{\overline{RN}^2}{RF} = 4a$, $\frac{\overline{RO}^2}{RG} = 4a$.

Considerato dunque RK come asse delle ascisse, ed RS come quello delle ordinate; si vede chiaro che i quadrati delle ordinate sono in ragione diretta colle rispettive ascisse; carattere distintivo della parabola. Inoltre, poichè i Matematici insegnano che il parametro della parabola è uguale al rapporto

fra il quadrato dell' ordinata e l'ascissa corrispondente, è manifesto che il parametro di tal parabola è $4a$.

III. SCOLIR. 1° Queste costruzioni sono tutte fondate sul parallelogrammo delle forze applicato alle forze acceleratrici. Così un sasso lasciato cadere dall' estremo dell' albero di una nave va a colpirne il piede, comecchè la nave cammini. Poichè il suo moto verticale (come i moti parziali che si compiono sulla nave) si combina col moto che esso avea comune colla nave medesima e concorre al suo moto assoluto.

Fig. 107.

2° In Balistica si usano due formole diverse dalla ritrovata più sopra. A stabilirle convien riferire la parabola RAB ai due assi ortogonali RX, ed RY; e così abbassata dal punto A la AH perpendicolare all'asse delle ascisse, la RH deve dirsi x, ed y la AH. Si chiami α l'angolo di proiezione MRH, e p la sua tangente MH. Prendendo per unità la RH, avremo $\frac{HM}{x}=\frac{p}{1}$, ed $HM=px$: Poichè il triangolo rettangolo RHM dà $\overline{RM}^2=\overline{RH}^2+\overline{MH}^2$, potremo dire $RM^2=x^2+p^2x^2$. Evidentemente $RE=MA=HM-AH=px-y$. Si sostituiscano ora questi valori in (α), e ne otterremo $\frac{x^2+p^2x^2}{px-y}=4a$; ossia

$$(1+p^2)\,x^2=4a\,(px-y). \qquad (\beta)$$

Si ordini ora questa equazione per p, ed avremo facilmente

$x^2 + p^2 x^2 = 4\,a\,x\,p - 4\,a\,y$; $p^2 x^2 - 4\,a\,x\,p = -4\,a\,y - x^2$; $p^2 - \frac{4ax}{x^2} p = -\frac{4ay - x^2}{x^2}$; $p^2 - \frac{4a}{x} p = -\frac{4ay - x^2}{x^2}$. Ma si sa che il valore della incognita, in una equazione generale di secondo grado, è espresso dalla metà del coefficiente del secondo termine preso col segno contrario, più o meno la radice seconda della somma di questa stessa metà quadrata col termine tutto noto. Dunque $p = \frac{2a}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{4a^2}{x^2} - \frac{4ay - x^2}{x^2}\right)}$, e finalmente

$$p = \frac{2a \pm \sqrt{(4a^2 - 4ay - x^2)}}{x}. \qquad (\gamma)$$

Le formole (β) e (γ) son quelle che si adoperano in Balistica.

3° Se lo scopo sarà collocato sulla stessa orizzontale del pezzo di artiglieria avremo $y = 0$, e però la (γ) si tramuterà in $p = \frac{2\,a \pm \sqrt{(4\,a^2 - x^2)}}{x}$.

4° Se poi lo scopo fosse più basso del pezzo, l'y diverrebbe negativa, e la stessa formola (γ) si tradurrebbe in $p = \frac{2\,a \pm \sqrt{(4\,a + 4\,a\,y - x^2)}}{x}$.

IV. COROLLARII. 1° Dunque i proietti lanciati colla stessa carica di polvere, e sotto angoli di inclinazione equidistanti da 45°, ànno la portata medesima. Dacchè cercare la portata è cercare il valore di x, nel caso di $y = o$, ossia nel caso che la formula (β) si tramuti in $(1 + p^2)\,x^2 = 4\,a\,p\,x$. Or bene: in tal caso $\frac{x^2}{x} = \frac{4\,a\,p}{1 + p^2}$, ed $x = \frac{4\,a\,p}{1 + p^2}$. Per altro $p = \frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.\,\alpha}$: perchè è la tangente dell'angolo α di proiezione. Dunque sostituendo avremo $x = 4.\,a \times \frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.\,\alpha} : \left(1 + \frac{\text{sen.}^2\,\alpha}{\cos.^2\,\alpha}\right)$;

$x = 4\,a \times \frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.\,\alpha} : \left(\frac{\cos.^2\,\alpha}{\cos.^2\,\alpha} + \frac{\text{sen.}^2\,\alpha}{\cos.^2\,\alpha}\right) = 4a.\,\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.\,\alpha} : \frac{1}{\cos.^2\,\alpha}$.

Ond'è che $x = \frac{4\,a.\,\text{sen.}\,\alpha\,.\,\cos.^2\alpha}{\cos.\,\alpha}$; e finalmente

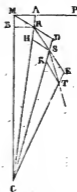
$$x = 4\,a.\,\text{sen.}\,\alpha\,\cos.\,\alpha\,. \qquad (\delta)$$

Or questo valore non varia col sostituire ad α il $90° - \alpha$; perchè così il seno diviene coseno, e viceversa. Dunque ecc.

2° Dunque fra tutti i tiri fatti con polvere della stessa forza, quello sollevato di 45° sulla orizzontale dà la portata massima. Dalla Trigonometria $\text{sen.}\,\alpha.\,\cos.\,\alpha = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,2\,\alpha$; però la formola ($\delta$) diventa $x = 4\,a\,\frac{1}{2}.\,\text{sen.}\,2\,\alpha = 2\,a.\,\text{sen.}\,2\,\alpha$.

Posto quindi $\alpha = 45°$, sarà $\text{sen.}\,2\,\alpha = 1$, ed $x = 2.\,a$. Valore che è il massimo tanto per gli angoli inferiori a 45°, come (1°) per gli inferiori.

Fig. 108.

36. Nozioni preambule sulle forze centrali. — I. SCOLIO. Poniamo che un mobile M (fig. 108.) sia lanciato da una forza istantanea in una certa direzione MP, e con tale energia, che dentro un piccolissimo tempo il detto mobile debba da M passare in A. Facciamo ancora che il medesimo sia sollecitato contemporaneamente da una forza continua a correre verso un determinato punto C, e con tale velocità, che dopo il tempo medesimo esso debba trovarsi per quest'ultima sola forza in B. È manifesto che nel tempo stesso il mobile percorrerà la diagonale MR del piccolissimo parallelogrammo MARB. Ma giunto il mobile in R, ove non ricevesse nessun nuovo impulso dalla forza continua, certamente percorrerebbe in un secondo uguale tempetto un'altra linea uguale RD nella direzione stessa di MR. Attratto per altro com'è dalla stessa forza costante verso C, correrà l'altra brevissima diagonale RS; e così via dicendo. Il mobile insomma scorrerà per la traiettoria MRST....

II. DEFINIZIONI. 1ª Se la traiettoria rientra in sè stessa, dicesi *orbita*.

2ª È detto *periodico* il tempo impiegato a percorrerla.

3ª Il punto (C), verso il quale il mobile è incessantemente chiamato dalla forza continua, si denomina *centro di rotazione* o *centro delle forze*.

4ª Ogni retta condotta dal centro dalle forze al mobile si chiama *raggio vettore*.

5ª La forza (MC) continua si appella *forza centripeta*.

6ª La forza istantanea (MA) viene denominata *forza di proiezione*.

7ª La medesima, poichè in ogni istante spinge il mobile a sfuggire per la tangente (MA, RD, SE,...) della curva, dicesi ancora *tangenziale*.

Fig. 109.

III. TEOREMI. 1° *Qualunque sia la natura della curva, descritta da un mobile animato da una forza continua centrale, le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi.*

Dimostrazione. Sia MA (fig. 109.) la linea percorsa dal mobile nel primo tempetto, AP sia la retta che il medesimo percorrerebbe nel secondo, se fosse animato dalla sola forza istantanea, ed AB lo spazio pel quale la centripeta, durante il tempetto secondo, avvicinerebbe il mobile al centro del moto. Compiuto il parallelogrammo ABRP sopra le due rette AP, AB, e tracciatane la diagonale AR, questa di fatto nel secondo tempetto sarà trascorsa dal mobile. Ora ognun vede che le aree dei due triangoli ACP, ed ACR, posti sulla stessa base AC e fra le medesime parallele AC, PR, sono uguali. Ognuno vede parimenti che sono uguali i due triangoli ACP, ed ACM: perchè ànno le basi AM, AP uguali e per dritto fra loro, e di più il vertice sul medesimo punto C. Dunque l'area ACR, descritta dal raggio vettore nel secondo tempetto, è uguale all'area ACM descritta dal medesimo nel tempetto primo. Altrettanto può ripetersi nel-

l'area descritta nel terzo, e nel quarto ecc. E però l'area descritta in due tempi è duplice di quella descritta in uno, e quella descritta in tre è triplice. Insomma chiamando α l'area di un settore strettissimo, cioè a base infinitesima, θ il tempetto impiegato dal raggio vettore a descriverla; inoltre rappresentando per a e t le cose stesse non infinitesime, ma finite, e per A tutta la superficie della traiettoria descritta nel tempo periodico T, potremo stabilire che

$$\alpha : \theta :: a : t :: A : T.$$

2° Viceversa: *se le aree descritte da un corpo intorno a un punto fisso, saranno proporzionali ai tempi, la forza che sollecita il mobile sarà diretta verso l'origine di esse, in tutto il tempo del moto.*

Dimostrazione. Si prolunghi fino a P la retta MA descritta nel primo tempetto, in guisa che AP riesca uguale ad MA; questa rappresenta la strada che percorrerebbe il mobile, se dopo il detto tempo fosse sospesa ogni forza continua. Ma di fatto esso va per la AR; questa è dunque la risultante della forza continua e della tangenziale. Il perchè, congiunto il punto P col punto R, la PR (pel principio della composizione delle forze) sarà parallela alla direzione della forza continua. Se dunque si potrà dimostrare che questa PR è parallela alla AC, ossia alla retta che nel principio del secondo tempo unisce il mobile coll'origine delle aree; sarà anche provata la tesi. Or così è. Imperciocchè congiunto il punto P col punto C, i due triangoli ACM, ed ACP (secondo quello che si è detto nella dimostrazione della tesi antecedente) saranno equivalenti. Ma sono per ipotesi equivalenti anche i due triangoli ACM ed ACR, descritti in due tempi uguali dal raggio vettore. Saranno quindi uguali anche le aree dei triangoli ACP ed ACR. Ma questi insistono sulla stessa base AC: dunque la retta PR, che congiunge i loro vertici, dovrà essere parallela alla base medesima. E però questessa AC rappresenta la direzione della forza continua.

3° *Le velocità del mobile nei diversi punti dell'orbita, cui descrive, in virtù di due forze, una centrale e l'altra tangenziale, stanno fra loro in ragione inversa delle normali condotte dal centro sulle tangenti la curva in quei punti.*

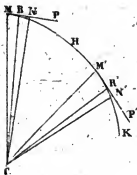
Dimostrazione. Supponiamo che il mobile M (fig. 110.) in un piccolissimo tempo descriva l'archetto MR, e in un altro punto dell' orbita descriva l' archetto M'R'. Certamente questi due archetti MR, ed M'R' rappresenteranno le velocità del mobile nei punti M, ed M'. Si conducano ora da C i raggi vettori CM, CN, CM', CR', e da M ed M' le due tangenti MP, M'P', e le due CN e CN' normali rispettivamente a queste tangenti. Le aree dei triangoli MCR, ed M'CR' sono date dalle due equazioni $MCR = MR \times \frac{CN}{2}$; ed $M'CR' = M'R' \times \frac{CN'}{2}$. Ma per quello, che abbiamo dimostrato nel teorema primo, queste due aree sono uguali. Dunque $MR \times \frac{CN}{2} = M'R' \times \frac{CN'}{2}$. Per la qual cosa otterremo $MR \times CN = M'R' \times CN'$; e finalmente $MR : M'R' :: CN' : CN$. E chiamando $v, v', \ldots$ le velocità MR, M'R', ed $r, r', \ldots$ i raggi vettori CN, CN', potremo stabilire

$$v : v' :: r' : r.$$

IV. COROLLARII. 1° Dunque la velocità di un mobile, che corre per un'orbita, allora soltanto sarà uniforme, quando l'orbita sarà circolare.

Fig. 110.

2° Dunque se l' orbita fosse ellittica, la velocità dovrebbe essere massima, quando l'asse vettore è il minimo; e minima, quando è massimo il raggio vettore.

3° Dunque i pianeti sono animati da una forza continua diretta verso l' origine delle aree. Dacchè, come dimostrò Kepler colla sua prima legge, le aree descritte dai raggi vettori dei pianeti sono proporzionali ai tempi. Da questo corollario prese le mosse Newton per stabilire le leggi della gravitazione.

4° Dunque la velocità dei pianeti dev' essere, (come è di fatto) massima al perielio, e minima all'afelio. Poichè, stando alla legge seconda di Kepler, ogni pianeta descrive un ellisse, al un de' fuochi della quale ritrovasi il Sole.

37. Forze centrali nel circolo. — I. SCOLIO. La forza MA (fig. 111.), che spinge il mobile a proseguire nel suo cammino rettilineo, può decomporsi in due, una MF uguale e direttamente opposta alla forza centripeta MB, l'altra MR uguale all'arco circolare pel quale il mobile corre di fatto, ed il quale per la sua brevità può considerarsi come un latercolo rettilineo di un poligono d' infiniti lati. Congiunto il punto A col punto R, questa AR, per la piccolezza di MR, riesce ad un tempo e parallela ad MF e sensibilmente diretta verso il centro C delle forze. Ora questa stessa AR rappresenta lo spazio, onde il mobile per la sola forza istantanea sarebbe distratto dalla traiettoria; ed è per conseguenza uguale anche allo sforzo, che il mobile fa continuamente in direzione opposta alla forza centripeta, in virtù della sua inerzia. Dunque evidentemente questo sforzo medesimo è uguale alla forza centripeta.

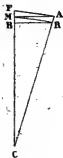



Fig. 111.

II. DEFINIZIONI. 1ª Lo sforzo (MF) che in ogni istante fa il mobile in direzione opposta alla forza centripeta, per allontanarsi dalla curva, su cui è da essa trattenuto, si appella *forza centrifuga*.

2ª La forza centripeta e la centrifuga ricevono l'appellazione comune di *forze centrali*.

III. TEOREMI. 1° *Ove un mobile liberamente scorra per una curva circolare, le forze centrali sono uguali al quadrato dell' arco, descritto in un tempetto piccolissimo, diviso pel diametro.*

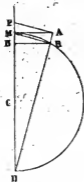
Dimostrazione. Suppongasi che M (fig. 112.) giri circolarmente intorno a C con tal moto, che in un piccolissimo tempo descriva l'archetto MR; e si conducano la tangente MA, il diametro MD, la retta AD, la BR parallela ad MA, e la corda MR. Dopo ciò si avverta, che i triangoli BMR, DMR sono simili: perchè oltre l' angolo retto MRD, MBR, ne ànno un

altro MRB, MDR formato da lati rispettivamente perpendicolari. Dunque BM:MR :: MR:DM. E però $BM = \frac{\overline{MR}^2}{DM}$. Sostituendo ora alla corda MR il suo arco α, il quale per l'estrema sua piccolezza si confonde con essa, chiamando $2r$ la DM, e φ la BM, sarà

$$\varphi = \frac{\alpha^2}{2r}.$$

Fig.112.

Onde per un'altra forza, ed un altro cerchio adottando i medesimi simboli con apice, avremo $\varphi' = \frac{\alpha'^2}{2r'}$; e finalmente

$$\varphi : \varphi' = \frac{\alpha^2}{r} : \frac{\alpha'^2}{r'}.$$

2° *La forza centripeta, e però anche la centrifuga, nel circolo è proporzionale direttamente alla velocità, ed inversamente al raggio.*

Dimostrazione. Sappiamo dal teorema antecedente che $BM = \frac{\alpha^2}{2.r}$. Ora (**30.** IV. 1°) ogni arco nel circolo è percorso con moto uniforme; e però (**29.** I.) sarà $\alpha = vt$. Dunque $BM = \frac{v^2t^2}{2.r}$. Inoltre la stessa BM rappresenta lo spazio che sarebbe percorso dal mobile, se fosse animato dalla sola forza continua. Dunque (**30.** II. 2°) potrà dirsi $BM = \frac{\varphi t^2}{2}$. Per conseguenza $\frac{\varphi t^2}{2} = \frac{v^2t^2}{2.r}$, e finalmente

$$\varphi = \frac{v^2}{r}.$$

E per due circoli diversi, sarà

$$\varphi : \varphi' :: \frac{v^2}{r} : \frac{v'^2}{r'}.$$

3° *Le forze centrali in diversi circoli sono in ragione diretta dei raggi, ed inversa dei quadrati dei tempi periodici.*

Dimostrazione. Chiamato r il raggio del circolo, e conservato al π il suo solito significato, pel quale esso indica il rapporto fra la circonferenza ed il diametro, tutta l'orbita circolare sarà rappresentata da $2.\pi r$. Ora questa è percorsa con moto uniforme, nel quale la velocità (**29.** II.1°) uguaglia il rapporto fra lo spazio ed il tempo. Dunque chiamando v la velocità, e T il tempo periodico, sarà $v = \frac{2.\pi r}{T}$, e $v^2 = \frac{4.\pi^2 r^2}{T^2}$.

Intanto dal teorema antecedente è $\varphi = \frac{v^2}{r}$. Per conseguenza $\varphi = \frac{4.\pi^2.r^2}{T^2.r} = \frac{4.\pi^2 r}{T^2}$, cioè sussisterà la formula

$$\varphi = 4.\pi^2.\frac{r.}{T^2}.$$

Nella quale equazione, essendo costante il coefficiente $4.\pi^2$, evidentemente φ è in ragione diretta di r ed inversa di T^2. E per due mobili, i quali corrono per circoli diversi, sarà

$$\varphi : \varphi' :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}.$$

4° *Le forze centripete in differenti circoli sono in ragione inversa dei quadrati dei raggi, tutte le volte che i quadrati dei tempi periodici sieno come i cubi dei raggi medesimi.*

Dimostrazione. Si suppone che per i raggi r, ed r', e per i tempi periodici T, e T' si verifichi $T^2 : T'^2 :: r^3 : r'^3$.

Ora dal teorema antecedente $\varphi : \varphi' :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$. Dunque

$$\varphi : \varphi' :: \frac{r}{r^3} : \frac{r'}{r'^3} :: \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}.$$

5° *Viceversa se le forze sono nella ragione inversa dei quadrati dei raggi, i quadrati dei tempi saranno proporzionali ai cubi dei raggi medesimi.*

Dimostrazione. La supposizione è che $\varphi : \varphi' :: r'^2 : r^2$. Perciò la formola finale del teorema 3° ci dà l'altra proporzione

$$r'^2 : r^2 :: \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}. \text{ Donde } \frac{r^3}{T^2} = \frac{r'^3}{T'^2}, \text{ e quindi } r^3.T'^2 = r'^3.\ T^2,$$

$$T^2 : T'^2 :: r^3 : r'^3.$$

6° *Le forze centrifughe di due mobili stanno fra loro in ragione diretta delle forze vive, ed inversa dei raggi delle orbite.*

Dimostrazione. Fin qui abbiamo considerato le forze centrali applicate ad un sol punto materiale: passando ora a considerarle applicate ai corpi, avvertiamo che la velocità, cui la forza continua φ, in un tempetto piccolissimo t, imprime al mobile di massa m, è uguale (**30**.II.1°) a φt. E però se f rappresenta la quantità di moto (**2**.II.4°), cioè la forza centrifuga assoluta del detto mobile m, sarà $f = m\varphi t$. Ma (2°)

$$\varphi = \frac{v^2}{r}. \text{ Dunque } f = \frac{mv^2t}{r}, \text{ e per un altro mobile } f' = \frac{m'v'^2t}{r'}\ ;$$

rappresentando $mv^2, m'v'^2$ le forze vive (**2**.II.6°). Onde

$$f : f' :: \frac{mv^2t}{r} : \frac{m'v'^2t}{r'} :: \frac{mv^2}{r} : \frac{m'v'^2}{r'}.$$

7° *Le forze centrifughe sono in ragione diretta delle masse moltiplicate pei raggi, ed inversa dei quadrati dei tempi periodici.*

Dimostrazione. Già dimostrando il teorema 3° dicemmo che

$$v^2 = \frac{4\pi^2r^2}{T^2}. \text{ Perciò la superiore proporzione diventa}$$

$$f : f' :: \frac{m}{r}.\ \frac{4\pi^2r^2}{T^2} : \frac{m'}{r'}.\ \frac{4\pi^2r'^2}{T'^2} :: \frac{mr}{T^2} : \frac{m'r'}{T'^2}.$$

8° *La forza centrale sta alla gravità, come l'altezza dovuta alla velocità di proiezione sta alla metà del raggio.*

Dimostrazione. Può confrontarsi la forza centrale alla gra-

vità, che è essa pure una forza continua, purchè suppongasi che la velocità v di proiezione sia quella dovuta al cadere del mobile da una data altezza a. Conosciamo (35.II.) che $v^2 = 2g.a$; ma (2°) $\varphi = \frac{v^2}{r}$, cioè $v^2 = \varphi r$. Dunque sarà

$$\varphi r = 2g.a; \quad \frac{\varphi.r}{2} = g.a; \quad \text{e } \varphi : g :: a : \frac{1}{2} r.$$

IV. COROLLARII. 1° Dunque la forza, che rattiene i pianeti nelle orbite loro, quando queste vogliano considerarsi come circolari, agisce su di essi in ragione inversa del quadrato della loro distanza dal centro di moto. Dacchè, secondo la terza legge kepleriana, i quadrati dei tempi periodici sono come i cubi dei raggi. Perciò, se è vero il teorema 4°, è vero anche questo corollario.

2° Dunque le forze centrifughe, a parità di velocità e di distanza dal centro di moto, sono in ragione diretta delle masse; a parità di velocità e di massa, sono in ragione inversa delle distanze; a parità di distanza e di massa, sono in ragione diretta dei quadrati delle velocità. Corollario contenuto nel teorema 6°.

3° Dunque la forza centrifuga, a parità di distanza e di massa, è in ragione inversa, del quadrato del tempo; a parità di tempo e di massa, è in ragione diretta del raggio; a parità di distanza e di tempo, è in ragione diretta della massa. Tutto ciò è asserito nel teorema 7°.

V. SCOLII. 1° Con questi principii si spiega I. il girare della fionda, per la quale il mobile acquista una velocità, che non potrebbe mai avere se fosse scagliato col braccio; II. la tensione, che soffre il filo della fionda medesima, crescente colla massa e colla velocità; III. come si spanda intorno alle girandole la polvere accesa; IV. perchè venga lanciata con impeto la mota dalle ruote, che girano velocemente sul fango; V. la costante verticalità dell'asse di rotazione della trottola; VI. il separarsi delle bucce, e dei sassetti fra loro, e dal grano, che viene vagliato; VII. il riunirsi delle materie galleggianti nel centro di un gorgo, e mille altri fatti di questo genere.

2° Le leggi sovra esposte sogliono verificarsi colla così detta *macchina delle forze centrali* (fig.114.). Per la quale si può far girare orizzontalmente un'asta (ab), preparata per sostenere quando un filo metallico con due palle infilatevi, quando (fig.113.) dei tubi di vetro (DE, FG) contenenti dei liquidi. Le palle (m, n) sono legate insieme (fig.114.) con un filo flessibile (mn), e I. ora sono uguali, ed ugualmente o disugualmente distano dal centro di rotazione; II. ora sono disuguali, e distanti dal centro medesimo o in ragione inversa delle loro masse, o comunque. In ambidue i casi àssi equilibrio sotto la 1ª condizione, e moto nella 2ª. I tubi (D,E) talora (fig.113.) comunicano con un vaso (V) quasi pieno d'acqua, posto sul centro di rotazione, e da quello salgono fino alla circonferenza (RS); talora sull'acqua di uno (F) di essi galleggia una palletta (m) di sughero, oppure dell'olio, e al fondo dell'altro (G) è posta una palla (n) di ferro, ovvero dell'idrargiro. In ogni caso, allorchè si fa girare l'asta orizzontale, l'acqua sale verso la circonferenza; ma più sale la palla (n) pesante e l'idrargiro, che stava in fondo, che la palla di sughero e l'olio che galleggiava.

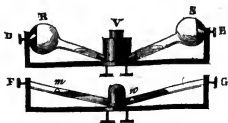



Fig. 113.

3° La teoria delle forze centrali può applicarsi eziandio alla rotazione diurna della Terra. Nei siti equatoriali la forza centrifuga dovuta a tal rotazione è direttamente opposta alla gravità. Quindi chiamando g la gravità dei corpi ivi cadenti nel vuoto, G quella dei corpi ai poli, o che avrebbero all'equatore se mancasse la forza centrifuga φ, sarà $G = g + \varphi$. Si cerca la relazione che passa fra G e φ; e però convien principiare dal determinare il valore di φ, e di G. Ma poichè è già noto (21. III.10°) il valore di $g = 9,7808 = 2.(4,89)$; basterà determinare il valore di φ, affinchè si conosca quello di $G = g + \varphi$.

Al quale intendimento ricordiamoci (III.2°) che $BM = \frac{\varphi t^2}{2}$;

e però nell' ipotesi che $t=1''$, sarà $BM=\frac{\varphi}{2}$, e $\varphi=2.BM$. Ricordiamoci inoltre (III.1°) che $BM=\frac{\overline{MR}^2}{DM}$. Ora un corpo all'equatore in 23^h, 56^m, 4^s, ossia in 86164^s, percorre metri 40 064 521; percorre cioè 365 metri a secondo. Dunque $MR=365$, ed $\overline{MR}^2=216\,225$. Inoltre si sa quant' è il dia-

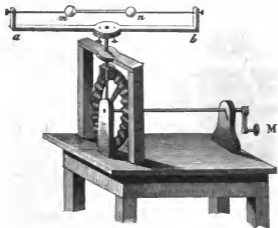



Fig. 114.

metro dell'equatore, ossia è $DM=12\,752\,932$ metri. Perciò $BM=\frac{\overline{MR}^2}{DM}=\frac{216\,225}{12\,752\,932}=0{,}01695$. Dunque $\varphi=2.BM=$ $=2\times0{,}01695$; e quindi $G=2.(4{,}89)+2.(0{,}01695)=$ $=2.(4{,}90695)$. Per la qual cosa $\frac{G}{\varphi}=\frac{2(4{,}90695)}{0{,}01695}=289$ circa. Dunque la forza centrifuga all'equatore è la ducentottantanovesima parte della gravità; e però ivi i corpi per que-

sta sola ragione diminuiscono in peso di $^1/_{289}$. Ossia il peso dei corpi all'equatore è per la forza centrifuga $^1/_{289}$ minore di quello ai poli.

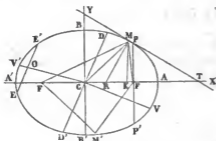



Fig. 115.

4° Il 289 è uguale a 17^2. Ond' è che, se la rotazione terrestre fosse 17 volte più rapida, la forza centrifuga che (IV. 2°) cresce col quadrato della velocità sarebbe all'equatore 289 volte maggiore, ossia uguaglierebbe il peso dei corpi. E per conseguenza ivi i corpi potrebbero restare sospesi in aria.

5° Quando si voglia conoscere l'effetto della forza centrifuga sul peso dei corpi posti fuori dell'equatore, conviene riflettere che essa, in quanto si oppone alla gravità, è proporzionale al coseno quadrato della latitudine. Imperocchè primieramente rappresenti C (fig. 117.) il centro della Terra, CE il raggio equatoriale, DL il raggio del parallelo della latitudine λ in questione, EF la forza centrifuga all' equatore, ed LR quella in L; in secondo luogo conducasi CL, e si risolva la LR in due, una LG secondo il raggio CL, l' altra GR normale al medesimo. Posto tutto ciò, è chiaro che la sola LG si oppone alla gravità. Ora colla gravità la stessa LG à la sopraddetta relazione. Vediamolo. Le forze centrifughe stanno fra loro (IV. 3°) in ragione diretta dei raggi; dunque EF : LR :: CE (ossia CL) : DL. Inoltre per la simiglianza dei triangoli CDL, LGR sarà LR : LG :: CL : DL, e moltiplicando fra loro

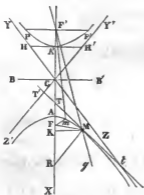



Fig. 116.

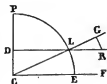
le due proporzioni, $EF \times LR : LR \times LG :: \overline{CL}^2 : \overline{DL}^2$. Ora chiamisi φ la EF, e φ' la LG; si faccia $CL=1$; e si avverta che $DL = \text{sen.}\,LCP = \cos.\,ECL$: ed avremo $\varphi : \varphi' :: 1 : \cos^2.\lambda$.

$$\varphi' = \varphi \times \cos^2.\lambda.$$

6° Se i pianeti e la Terra medesima fossero stati creati perfettamente sferici e nello stato fluido, in virtù della forza centrifuga proveniente dalla rotazione loro, avrebbero dovuto schiacciarsi ai poli, e rigonfiarsi all'equatore. Giove à uno schiacciamento uguale alla decimaquarta parte del suo asse maggiore; la differenza dei due assi equatoriale e polare della Terra è di $^1/_{300}$.

38. Forze centrali nelle curve coniche. — È utile per la scienza esaminare come la teoria delle forze centrali nel circolo possa estendersi alla parabola, alla ellisse, ed alla iperbola.

Fig. 117.

I. DEFINIZIONI. 1ª Si chiama *ellisse* quella curva, la quale può ottenersi col tagliare un cono per mezzo di un piano, che trapassi i due lati opposti di questesso. La ellisse (fig.115.) può anche definirsi quella curva piana (MA, M'A'), della quale ciascun punto (M, M',...) dista ugualmente in somma da due altri (F, F'), collocati nel suo piano (cioè $FM + F'M = FM' + F'M' = ...$).

2ª *Iperbole opposte* chiamansi (fig.116.) le due curve (PA'P', Z'AM), che nascono col tagliare due coni opposti al vertice con un piano che li trapassi ambidue. Ognuna di tali curve è detta *iperbola*. Questa può anche definirsi quella curva piana, i cui singoli punti (M, m,...) ànno tutti la stessa differenza di distanza da due altri (F, F') presi nel suo piano (cosicchè $FM - F'M = Fm - F'm = ...$).

3ª L'ellisse, l'iperbola, e la (fig.118.) parabola (35.I.9°) si domandano *curve* o *sezioni coniche*.

4ª I due punti (F, F') collocati in guisa, che riesca sempre uguale (fig.116, 117.) o la somma, o la differenza delle distanze loro da un punto qualunque (M) preso a piacere sul perimetro della curva, diconsi *fochi*.

5ª Il punto medio (C) della retta (FF′), che congiunge i fuochi, è detto rispettivamente *centro* dell'ellisse, o delle iperbole opposte.

6ª Nell'ellisse domandasi *eccentricità* la distanza (CF) fra il centro ed il fuoco.

7ª Qualunque retta (DD′, AA′), che passa pel centro, e va al perimetro vuoi dell'ellisse, vuoi delle iperbole opposte, à nome *diametro*.

8ª Diconsi *vertici del diametro* i suoi due estremi (V, V′).

9ª Due diametri (DD′, VV′) ricevono il nome di *coniugati*, se una retta (EE′) parallela ad uno (DD′) è divisa per metà (EO = E′O) dall'altro (VV′).

10ª Il diametro (AA′), che coincide colla retta (FF′) congiungente i fochi, riceve l'appellazione di *asse maggiore*, o *principale*, o *trasverso*.

11ª *Asse minore*, o *secondario*, o *coniugato* è denominato nella ellisse il diametro (BB′) ortogonale all'asse trasverso; nella iperbola la retta (BB′), che passa nel centro (C), è ortogonale parimente all'asse trasverso, ed i cui due estremi (B, B′) distano dal vertice (A) dell'asse principale, quanto il centro (C) dista dal foco (F).

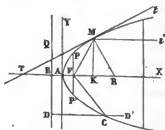



Fig. 118.

12ª La metà di ciascun asse è detta *semiasse*.

13ª Un'iperbola, i cui due assi (AA′, BB′) sieno uguali fra loro, à nome *equilatera*.

14ª La retta (PP′) passante pel fuoco di qualsivoglia sezione (fig. 115, 116, 118.) conica, e normale all'asse trasverso, riceve la denominazione di *parametro*.

15ª Ogni retta (FM), condotta da un fuoco al perimetro della curva, denominasi *raggio vettore*.

16ª Poniamo che una retta (HH′) sia perpendicolare all'asse trasverso dell'iperbola, passi pel suo vertice, e venga divisa da questesso in due metà (AH = AH′) uguali al semiasse (CB) coniugato. Ricevono l'appellazione di *assintoti* le due rette

(CY, CZ) condotte dal centro (O) per gli estremi della sopraddetta linea (HH').

17ª Chiamasi *circolo osculatore* di una curva qualunque quella circonferenza circolare, che à un elemento piccolissimo comune colla detta curva.

18ª Il raggio del circolo osculatore dicesi il *raggio di curvatura* relativamente a quell'elemento, al quale è condotto.

19ª In una curva qualunque (fig. 115, 116, 118.) per *tangente* intendesi quella porzione (MT) di tangente geometrica, che rimane fra il punto di contatto e l'asse principale.

20ª *Normale* significa la retta (MR) perpendicolare alla tangente nel punto di contatto, e terminata all'asse principale.

21ª *Suttangente* è il nome imposto al segmento (KT) dell' asse principale computato dal punto d' incontro (T) della tangente fino al piede (K) della perpendicolare all'asse stesso abbassata dall'altro estremo (M) della tangente.

22ª Viene denominato *sunnormale* il segmento (KR) dell'asse principale racchiuso fra la normale (MR), e la perpendicolare (MK) all'asse stesso abbassata dal punto (M) di contatto.

II. LEMMI. 1° Chiamato R il raggio di curvatura, p il parametro, ed n la normale, nel trattato delle sezioni coniche si dimostra una tesi espressa dalla formula

$$R=\frac{4}{p^2}\,n^3. \qquad (\alpha)$$

2° Espressa inoltre per q una perpendicolare abbassata dal fuoco sulla tangente, e per r il raggio vettore, ivi provasi

$$n=\frac{pr}{2q}. \qquad (\beta)$$

3° Indicando con a il semiasse maggiore, e con b il minore,

$$p=\frac{2b^2}{a}. \qquad (\gamma)$$

4° Ove S rappresenti l'area dell'ellisse, è ivi provato che

$$S=\pi\,.\,ab. \qquad (\delta)$$

5° Nella parabola $n^2=pr$. (ε)

6° Nella ellisse $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ar - r^2)$. (ζ)

7° Nell'iperbola $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ar + r^2)$. (η)

III. SCOLII. 1° Per estendere la teoria delle forze centrali nel circolo alle sezioni coniche, conviene stabilire una formula generale, che rappresenti il valore della forza centripeta, qualunque sia la curva AM (fig. 119.), per la quale il mobile sia costretto a scorrere in virtù della medesima, o di una determinata forza di proiezione. A tale intendimento la forza centripeta venga rappresentata da ME; MO indichi il raggio del circolo osculatore, che combacia coll'elemento Mm, e TM sia la tangente al punto M, la quale riuscirà perpendicolare al raggio di curvatura MO. Inoltre dal centro delle forze F si mandi la FG perpendicolare alla medesima tangente; e la ME si decomponga in due, una ML secondo la tangente, l'altra MC secondo il raggio di curvatura. Questa seconda sarà la forza centripeta e centrifuga relativamente al circolo osculatore. Con tale costruzione otterremo due triangoli simili FGM, LEM; i quali ci daranno la proporzione ME:MF::LE:FG. Ora chiamisi φ la forza centrale ME, r il raggio vettore MF, f la LE=MC, e q la perpendicolare FG. Sarà $\varphi : r :: f : q$; e però $\varphi = \frac{r}{q}.f$. Ma la forza centrale f nel

Fig. 119.

la curva circolare è valutata (37.III.2°) da $\frac{u^2}{R}$, quando u indichi la velocità, cui esso imprime, ed R il raggio di curvatura. Dunque

$$\varphi = \frac{r}{qR} \times u^2. \qquad (9)$$

Per determinare il valore di u si avverta, che la velocità, onde è percorso l'archetto piccolissimo Mm, si può considerare come uniforme, e però uguale a questo archetto diviso pel tempo t; ossia $u = \frac{\text{Mm}}{t}$. Cercando ora il valore di Mm, notiamo che l'area S del triangolo MFm è uguale ad $\frac{\text{Mm} \times \text{FG}}{2}$: cioè $S = \frac{\text{Mm}.\, q}{2}$; ed $\text{Mm} = \frac{2.S}{q}$. Ma avevamo $u = \frac{2S}{qt}$. Per la qual cosa esprimendo con S l'area totale o parziale racchiusa nella traiettoria, e con T il tempo impiegato a percorrerla, sarà $u = \frac{2.S}{qT}$, ed $u^2 = \frac{4.S^2}{q^2T^2}$; e la formula (9) si converte in $\varphi = \frac{r}{qR} \times \frac{4S^2}{q^2T^2}$; quindi avremo

$$\varphi = \frac{4.S^2 r}{q^2.R.T^2} : \qquad (1)$$

formola, che vale per qualsivoglia curva.

2° Dalla proporzione sopra esposta, cioè $\varphi : r :: f : q$, risulta $f = \frac{\varphi . q}{r}$: espressione della forza centrifuga. Ora si può senza errore supporre che, in ogni piccola unità di tempo, il mobile si muova *circolarmente* attorno al centro di curvatura, e sia dotato della forza centrifuga f, che si conviene a tal moto circolare. Imperocchè una curva qualunque è una somma di archetti circolari piccolissimi, la posizione e grandezza dei quali varia continuamente. Ond'è che, come la posizione e grandezza del cerchio osculatore varia, viene del pari a variare la forza centrifuga, la quale distrugge ora più ora meno la forza centripeta. Varia quindi risulta eziandio in ogni istante la velocità del mobile per la curva, al modo medesimo, in cui è variabile la forza centrifuga.

IV. PROPOSIZIONI. 1ª *Supposto che un mobile scorra per una qualunque delle tre sezioni coniche, in virtù di una forza tangenziale, e di un'altra che lo richiami incessantemente verso il foco della medesima curva, la forza centrale agirà in ragione inversa del quadrato della distanza.*

Dimostrazione. Dalle due formule (α) e (β) si ricava $R=\frac{4}{p^2}\times\frac{p^3r^3}{8q^3}=\frac{pr^3}{2q^3}$. Ond' è che la formula (ι) si tramuta in $\varphi=\frac{4.S^2r}{T^2q^3}\times\frac{2q^3}{pr^3}$. E per conseguenza

$$\varphi=\frac{8.S^2}{p.T^2}\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad (\varkappa)$$

Ora per una medesima sezione conica è costante tanto p quanto (**36**.III.1°) il rapporto $S:T$. Dunque, nei diversi punti dell'orbita, la forza opera in ragione inversa del quadrato della distanza.

2ª *La forza, che richiama verso un medesimo fuoco di due orbite ellittiche due mobili, i quali ubbidiscono alla terza legge kepleriana, agisce su di essi in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze.*

Dimostrazione. Quando T rappresenta il tempo periodico, S è l'intera area ellittica. Or bene nella formula ($\varkappa$) ad S e p sostituiscansi i valori dati dalle formule (δ) e (γ); ed avremo $\varphi=\frac{8}{T^2.r^2}\times\pi^2.a^2b^2:\frac{2b^2}{a}=\frac{8.\pi^2.a^3b^2}{T^2r^2\times2b^2}=\frac{4\pi.^2a^3}{T^2r^2}$; cioè

$$\varphi=\frac{4.\pi^2a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad (\lambda)$$

Se a' è il vettore dell'altra orbita, e T' il tempo periodico, $\varphi'=\frac{4.\pi^2a'^3}{T'^2}\times\frac{1}{r'^2}$. E però $\varphi:\varphi'::\frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}:\frac{a'^3}{T'^2}\cdot\frac{1}{r'^2}$. Ma per ipotesi $a^3:a'^3::T^2:T'^2$, ossia $\frac{a^3}{T^2}=\frac{a'^3}{T'^2}$. Dunque

$$\varphi:\varphi'::\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r'^2}.$$

3° *L'altezza dovuta alla velocità, di cui gode un mobile, che scorre per una curva conica è quarta proporzionale geometrica dopo il parametro e la normale.*

Dimostrazione. Già dalla formula (9) possiamo inferire che $u^2 = \frac{\varphi . qR}{r}$. Conosciamo ancora (**35**. II.) che in generale $v^2 = 2.g.a$; e però nel caso nostro, chiamando h l'altezza sopra nominata, $u^2 = 2.\varphi.h$. Quindi $2.\varphi.h = \frac{\varphi.qR}{r}$, ed $h = \frac{q}{2r}.R$. Ora dalle formule (α), e (β) si ricava $R = \frac{pr^3}{2q^3}$. Dunque $h = \frac{q}{2r} . \frac{pr^3}{2q^3} = \frac{pr^2}{4q^2} = \frac{p^2r^2}{4q^2} . \frac{1}{p}$. Ma la formula ($\beta$) dice $n = \frac{pr}{2q}$; e però $\frac{p^2r^2}{4q^2} = n^2$. Per conseguenza

$$h = n^2 . \frac{1}{p}. \qquad (\mu)$$

V. COROLLARII. 1° Dunque nella parabola l'altezza dovuta alla velocità, di cui gode il mobile, è uguale al raggio vettore. Imperocchè in tal caso (ε) sarà $n^2 = pr$; e quindi la formula (μ) si traduce in $h = pr : p = r$. La qual cosa significa che il corpo, attratto verso il foco della parabola, avrebbe a percorrere con moto uniformemente accelerato tutta la lunghezza del raggio vettore per acquistare la velocità, della quale si trova dotato in un punto della traiettoria.

2° L'altezza medesima nell'ellisse è minore del raggio vettore. Chè (ζ) sarà $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ar - r^2)$, ed ($\gamma$) avremo $p = \frac{2b^2}{a}$. Onde $h = \frac{b^2}{a^2}(2ar - r^2) . \frac{a}{2b^2} = \frac{2ar - r^2}{2a} = r\left(1 - \frac{r}{2a}\right)$. In cui siccome $r < 2a$, sarà anche $h < r$.

3° Nell'iperbola l'altezza sopraddetta è maggiore del raggio vettore. Poichè in tal curva (η) abbiamo $n^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ar + r^2)$;

la formula (μ) diventa $h=\frac{b^2}{a^2}(2ar+r^2).\frac{a}{2b^2}=r(1+\frac{r}{2a})$; in cui evidentemente $h>r$.

4° Dunque l' altezza medesima nel circolo è uguale alla metà del raggio. Mentre il circolo può considerarsi come una ellisse, nella quale i due assi sieno uguali; e per conseguenza il parametro è uguale a $2r$, e la normale è il raggio stesso. Onde $h=\frac{r^2}{2r}=\frac{r}{2}$. O in altro modo: la formola $v^2=2.g.s$ già (**30**.II.2°) dimostrata, ove si chiami h lo spazio s, il quale dev' essere percorso dal mobile, in virtù della forza continua e costante non g ma φ, affinchè esso trovisi finalmente dotato della velocità non v ma u, ci darà $h=\frac{u^2}{2.\varphi}$. Onde $\varphi=\frac{u^2}{2h}$. Abbiamo altrove (**37**.III.2°) stabilito che nel moto circolare $\varphi=\frac{u^2}{r}$. Dunque per tal moto $r=2.h$; ossia $h=\frac{r}{2}$.

5° Dunque un mobile attratto da una forza centrale continua, e lanciato da una forza di proiezione percorrerà o un circolo, o un' ellisse, o una parabola, o un' iperbola, secondo che la forza di proiezione sarà capace d'imprimere quella velocità, cui il mobile acquisterebbe cadendo dall'altezza di mezzo raggio, oppure di un raggio vettore o scarso, o giusto, o abbondante. Infatti tale è la velocità, di cui si trova dotato un mobile, che scorre per una delle sopraddette curve.

VI. ALTRO SCOLIO. La formula ($\varkappa$) serve a determinare il valore della forza centrale all'unità di distanza. Giacchè fatto in essa $r=1$, ne avremo

$$\varphi=\frac{8.S^2}{p.T^2}. \qquad (\nu)$$

39. Spiegazione dei movimenti de'corpi celesti.— Le dottrine esposte nei due paragrafi antecedenti collimano alla spiegazione, che forma il tema del presente paragrafo.

I. DEFINIZIONE. Col nome di *attrazione universale*, o di *gravitazione* si vuole intendere la forza stessa della gravità in quanto sollecita i corpi celesti.

II. PROPOSIZIONE. *Il moto, che anima il sistema solare, proviene da una forza di proiezione, e dalla gravitazione.*

Dimostrazione. Questa può dividersi in tre parti: giacchè nella tesi non solo si afferma che i corpi celesti del nostro sistema vengono sollecitati da una forza centrale, e da una tangenziale; ma si asserisce ancora che la forza centrale è la gravitazione, ossia la forza stessa, per cui cadono i corpi sullunari. Or questa seconda cosa importa che la detta forza abbia la medesima natura, e segua le stesse leggi della gravità; e però può essere trattata per maggior chiarezza in due punti separati.

1ª *parte.* Già (**26**.IV.3°) abbiamo provato, che i pianeti sono animati da una forza continua diretta verso l'origine delle aree descritte dai loro raggi vettori. E poichè la proporzionalità delle aree o la seconda legge kepleriana, donde si deduce quell'illazione, si avvera tanto nei pianeti primarii e nelle comete, le cui aree ànno l'origine loro nel Sole, quanto nei satelliti, i raggi vettori dei quali muovono tutti dal primario; così può affermarsi che tutti i corpi celesti del nostro sistema sono animati da due forze una tangenziale, e l'altra centrale residente nel Sole per le comete, ed i pianeti primarii, ed in questessi per i satelliti.

2ª *parte.* Che la forza centrale, la quale ritiene tutti i pianeti e le comete nelle orbite loro, segua le leggi della gravità (**31**.I.2°) non significa altro se non che essa opera in ragione diretta delle masse ed inversa dei quadrati delle distanze. Questa seconda cosa è manifesta a chi consideri, che tanto i pianeti primarii e le comete in riguardo al Sole, quanto i satelliti verso i primarii obbediscono alla prima legge kepleriana. Ora in tal caso (**38**. IV. 1ª e 2ª) la forza centrale, da cui è animato il mobile, agisce in ragione inversa del quadrato della distanza. Ma la prima cosa, che cioè la detta forza centrale sia un'attrazione scambievole, che esercitasi fra le molecole del corpo attratto e dell'attraente, come accade nella gravità, e che però la gravitazione universale

operi nella ragione diretta del prodotto delle masse, è un poco più difficile a verificarsi; anzi sembra contraddetta dai fatti. Imperocchè da tale teorica s'avrebbe ad inferire che tanto il Sole come la Terra, a cagion d'esempio, dovrebbero girare intorno ad un punto, esistente sulla retta condotta dalla Terra al Sole, e dividente questessa retta in parti inversamente proporzionali alle masse dei detti due corpi. Il Sole non sarà dunque più immobile, come è stabilito dalle leggi kepleriane. Infatti evidentemente se M rappresenti la massa del Sole, m quella di un pianeta, ed r la loro distanza; la grandezza dell'attrazione, che à luogo fra il Sole ed il pianeta, deve esprimersi per $\frac{Mm}{r^2}$. Dunque $\frac{M}{r^2}$ rappresenta la forza acceleratrice, colla quale il Sole è attratto dal pianeta, ed $\frac{m}{r^2}$ indicherà quella, onde il pianeta è attratto dal Sole. Trattandosi di moto relativo, come nel caso nostro, uno dei due astri può considerarsi immobile, purchè ad esso attribuiscasi il moto dell'altro, cioè purchè ad ogni unità di massa di quest'ultimo venga attribuita, non solamente la sua, ma anche la forza spettante all'unità di massa del primo. Il moto relativo del pianeta intorno al Sole, o viceversa, procede come se sopra un'unità di massa del corpo mobile, a distanza r dell'immobile e nella direzione di questo, operasse la forza $\varphi = \frac{M}{r^2} + \frac{m}{r^2} = \frac{M+m}{r^2}$. Ma da ($\lambda$) si à $\varphi = \frac{4\pi^2 . a^3}{T^2} . \frac{1}{r^2}$. Dunque $\frac{M+m}{r^2} = \frac{4\pi^2 . a^3}{T^2} . \frac{1}{r^2}$, ed

$$M + m = \frac{4\pi^2 . a^3}{T^2}. \qquad (\xi)$$

E per un altro pianeta di massa m', sarà $M + m' = \frac{4\pi^2 . a'^3}{T'^2}$.

Ora per la terza legge kepleriana $\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2}$. Dunque i

secondi membri delle ultime due equazioni, sono uguali. Ma non sono uguali i primi: perchè m ed m' sono masse diverse. Per conseguenza o è completamente falsa la 3ª legge kepleriana, o la massa di ciascun pianeta è una piccola cosa in confronto a quella del Sole; cosicchè $m-m'$ riesce una quantità trascurabile in relazione ad M, e la detta legge è non matematicamente, ma sensibilmente esatta. Or questa seconda parte della disgiuntiva è la vera, come passiamo ora a dimostrare. Per ritrovare il rapporto fra la massa M solare, e la m terrestre, avvertiamo che la forza, cui la Terra esercita sulla massa 1 alla propria superficie, può indicarsi con $\frac{m}{R^2}$, essendo R il raggio terrestre. Ma siccome tal forza, ove prescindasi dalla forza centrifuga, è misurata dall'accelerazione g, sarà $m=g.R^2$. Per questa equazione dividasi la (ξ), ed avremo $\frac{M+m}{m}=\frac{M}{m}+1=$
$=\frac{4.\pi^2.a^3}{g.T^2.R^2}$; e però il rapporto cercato è

$$\frac{M}{m}=\frac{4.\pi^2.a^3}{g.T^2.R^2}-1. \qquad (o)$$

La semplice ispezione di questa formula basta a far vedere la grande sproporzione fra M ed m a chi conosca ciò, che venne asserito nella Prima Parte (**50**.I.2°), che cioè il semiasse dell'orbita solare $a=24000.R$. Ma è bene determinare un po' meglio la cosa. Il Sole, come si è veduto nella Parte Prima (**47**.IV.), à una parallasse orizzontale di secondi 8,6. Il che significa, che (fig.120.) dal Sole (P') il raggio terrestre (CO) apparirebbe di minuti secondi 8,6. Prendendo quindi per unità la distanza (CP') del Sole, cioè a, e chiamando l la misura lineare dell'arco parallatico nella circonferenza di raggio $1=a$, evidentemente avremo $a:R::1:l$, ed $a=\frac{R}{l}$. Ora $l=\frac{2\pi(8,6)}{360\times60^2}$; e quindi

$a = \frac{360.\,3600.R}{2\pi(8,6)} = \frac{206\,265.R}{8,6} = 23984.R$. Cioè il Sole dista dalla Terra quasi 24 mila raggi terrestri. Sostituendo in ($\circ$) ad a queste suo valore, ed a T, g, R i loro, che sono conosciuti; si ottiene in numero tondo $\frac{M}{m} > 350000$.

Per conseguenza la distanza del centro comune di massa dei due astri dal centro del Sole è più piccola della 350000esima parte della distanza del Sole dalla Terra; ossia è circa 400 kilometri. Intanto il raggio solare è un 7 mila kilometri. Dunque il detto centro comune cade nel corpo stesso del Sole; anzi ad una distanza dal centro del Sole uguale a meno di $^1/_{20}$ del suo raggio.

3ª *parte.* Finalmente la forza centrale, che anima le comete ed i pianeti, è della stessa natura della gravità. Prendiamo ad esempio l' attrazione della Terra per la Luna; e sostituiamo i valori concreti nella formula (μ) della forza centrale. Sanno tutti che $\pi = 3,1415...$; e però $\pi^2 = 9,8596$. È anche noto, che il tempo periodico lunare $T = 27^d,322$; e, ridotto a secondi, $T = (27,322).24.60^2$. Quanto al valore del semiasse principale a dell' orbita lunare, ricordiamo ciò che fu accennato nella Prima Parte (**47. 50.**); che cioè $OC = CP' \times \text{sen}.OP'C$, e dall'osservazione $CP'O = 57',11''$, ed $OC = 6400$ kilometri; e però $6400 = a \times \text{sen}.(57',11'')$, ed $a^2 = \frac{6400.\,6400^2}{\text{sen}^2.(57',11'')}$. Finalmente per quello, che spetta al raggio vettore, a meglio conoscere la natura della forza in questione supporremo la Luna alla superficie della Terra; e con ciò $r = 6400$: quindi nel valore di a^2 potremo sostituire r^2 al secondo fattore. Posto tutto ciò, senza dubbio veruno

$$\varphi = \frac{4(9,8596).\,6400^2.\,r^2}{\text{sen}^2.(57',11'')T^2.r^2} = \frac{4\,(9,8596),6400}{\text{sen}^2.(57',11'')(27,322)^2.\,24^2.\,60^4}.$$

Calcolato questo secondo membro coi logaritmi, si trova che la forza, colla quale la Terra attrae la Luna, se questa si

ritrovasse alla superficie terrestre, diverrebbe $\varphi = 9,78$ metri; che è appunto (**31**.III.10°) il valore della gravità.

III. scolii. 1° La forza di proiezione deve aver impresso ai pianeti, ed alle comete periodiche una velocità minore di quella, che i detti corpi celesti avrebbero acquistato cadendo al centro del loro moto. Chè (**38**.V.2°) tale è la condizione, sotto la quale si verifica il moto ellittico.

2° L'attrazione, che il Sole per la sua grandezza e la Luna per la sua vicinanza esercitano verso la Terra di forma ellissoidale, produce su questa certi moti, dai quali derivano le apparenze della precessione e della nutazione. Per restarne convinti si principii dal riflettere, che la precessione non consiste in uno spostamento dell'asse terrestre; come avverrebbe, ove la Terra compisse la sua rotazione diurna intorno a due punti diametralmente opposti, ma successivamente sempre diversi. Dappoichè se la retta ideale, che congiunge i due poli, si spostasse nell' interno della Terra; o in altri termini, se il moto dell'asse non fosse accompagnato da tutta la massa del nostro globo, le latitudini terrestri, ossia le situazioni geografiche dei diversi paesi rapporto ai poli, verrebbero mano mano cangiando; e spostandosi il rigonfiamento equatoriale, il livello dei mari sarebbe sempre diverso. Or questo non avviene: e però dee dirsi che il moto dell' asse è accompagnato da tutta la massa del nostro globo. Di tal moto adunque, a cui partecipa tutta la Terra, è stata ricercata la cagione: e si è trovato che esso deve ascriversi all'essere la Terra un'ellissoide, e dall' obliquità dell' equatore verso l'eclittica, e verso l'orbita lunare.

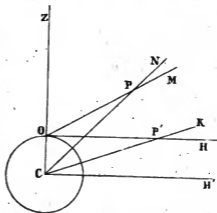



Fig. 120.

E veramente un ellissoide può considerarsi costituita da due parti: una delle quali sia una sfera inscritta, che lo tocchi ai poli; e l'altra sia l'involucro, che à spessezza nulla ai poli e massima all'equatore, e che però può riguardarsi come una fascia equatoriale avvolgente la Terra. Or bene: il Sole attrae più la metà vicina di tal fascia, che la lontana; e con ciò tende a riportare la fascia stessa nel piano dell'eclittica. È evidente che questa azione debba esser massima nei solstizii e nulla negli equinozii: dacchè nel 1° caso la retta, che congiunge il centro del Sole con quello della Terra, passa pei tropici terrestri; nel 2° passa per l'equatore medesimo. Ond'è che la Terra, quando le si ritogliesse il suo moto di rotazione, dovrebbe annualmente oscillare sopra e sotto l'eclittica, ed intorno al suo centro inseparabile dal piano di quella. Ma la rotazione diurna cangia affatto il risultato della accennata attrazione. Vediamolo. KNKN′ (fig.121.) rappresenti l'intersezione dell'eclittica colla Terra, ENQN′ l'equatore terrestre, NN′ l'intersezione dell'equatore coll'eclittica, o la linea dei punti equinoziali: inoltre il Sole stia dallà parte di K, e la Terra giri nel senso delle frecce. Un dato punto A di equatore, per la rotazione, deve scorrere in un tempetto piccolissimo l'archetto AB; ma, attratto com'è in giù dal Sole, è spinto a percorrere la retta AS: e però dovrebbe esso correre per AR diagonale del parallelogrammo ABRS, l'equatore porsi nella giacitura RA*n*, l'obliquità KNQ dell'eclittica diminuire, ed il punto equinoziale N retrocedere in *n*. Ma un altro punto F equatoriale, collocato dalla parte del Sole, e discendente per FG verso l'eclittica, per la stessa azione solare sarà sospinto in basso secondo FT, e dovrà in ultimo risultato procedere secondo la diagonale FV: con che verrà ad ingrandirsi l'angolo KN′Q, ed a retrocedere il punto equinoziale N′ sino ad *n*′. Per la qual cosa le azioni esercitate dal Sole sulle dette due particelle, quanto a sollevarle o deprimerle, elidonsi a vicenda e riescono inefficaci; ma quanto a far retrocedere i punti equinoziali, si addizionano, e producono l'effetto. Accade il medesimo per le particelle poste nella regione NEN′ nascosta al Sole. Quindi la precessione degli equinozii. Perchè l'inclinazione

dell'equatore all'eclittica rimarrà costante, ma lungo quest'ultima scorreranno i punti equinoziali.

3° Il piano dell'orbita lunare è inclinato di quasi 6° sul piano dell'eclittica; e questa inclinazione mantenendosi costante, risponde successivamente ogni 19 anni a tutte le parti del Cielo; o in altri termini ciascun nodo dell'orbita della Luna scorre ogni 19 anni per tutti i punti dell'eclittica. Dal che conseguita che la Luna nel tempo stesso, in cui fa retrocedere la linea degli equinozii, dee produrre un leggiero cangiamento nell'inclinazione dell'equatore sull'eclittica; in che consiste il fenomeno della nutazione dell'asse.

4° Venendo ora alla causa, che produce la retrogradazione dei nodi dei pianeti, limitiamoci a considerarla in riguardo alla Luna. Essendo l'orbita lunare inclinata al piano dell'eclittica, il Sole esercita sulla Luna un attrazione, che la obbliga a deviare dall'orbita medesima. E però questa non rimane costantemente nello stesso piano; ma passa per tutti quelli, che sono intorno intorno allo stesso modo inclinati sull'eclittica. Accade il medesimo per tutti gli altri pianeti.

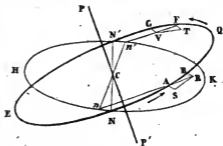



Fig. 121.

5° La legge delle orbite ellittiche suppone che i pianeti sieno sottoposti alla sola azione del Sole. Ma la gravitazione è reciproca, ossia i pianeti e le comete agiscono nel tempo stesso uno sull'altro e tutti sul Sole; e però ne nascono delle deviazioni, che sono chiamate *perturbazioni*. Fra le quali, altre vanno sempre per un verso e sono dette *secolari*, altre mutano verso per tornar poi nel senso primiero e chiamansi *periodiche*. Sono conosciuti dal fatto gli effetti dell'attrazione di Venere sulla Terra, e le perturbazioni di Giove e di Saturno, non che di questessi per l'azione dei loro satelliti. Le comete nell'avvicinarsi al Sole talora passano dappresso a qual-

che pianeta di maggior massa, onde vengono attratte: e così il tempo periodico della loro rivoluzione potrà riuscir più lungo; come è avvenuto nella cometa apparsa nel 1682 e nel 1759. Quando Sole, Terra, Luna si trovano sulla linea delle sizigie, se accade la congiunzione, la Luna è attratta dal Sole più fortemente della Terra, e la gravitazione di quella verso questa ne rimane diminuita; se accade l'opposizione, la Luna è attratta meno della Terra, e diminuisce la tendenza di questa verso quella. Quando poi la Luna trovasi nelle quadrature verrà dal Sole attratta obliquamente, e perciò con minor forza, di quando era in congiunzione.

Fig. 122.

6° Anche il *flusso* e *riflusso* del mare devesi alla gravitazione universale. Imperocchè l'attrazione, cui la Luna esercita verso la parte di mare, che le è rivolta, à maggiore energia di quella cui esercita verso il nucleo solido della Terra; e ciò perchè quella è a lei più prossima di questo. Parimente il nucleo solido è attratto più dell'acqua dei mari non esposti alla Luna. Quindi più si solleva verso la Luna l'acqua del mare prossimo, che non la parte solida terrestre; e più questessa dell'acqua del mare diametralmente opposto al primo. Perciò il mare si alza in ambedue le estremità del diametro diretto verso la Luna, e si abbassa nei siti distanti 90° dalle dette estremità. E questa è la cagione del flusso, che à luogo nella culminazione superiore ed inferiore della Luna, e del riflusso, che avviene quando essa nasce o tramonta. Ma è necessario che passi un certo tempo prima che si accumulino, per così dire, tanti attraimenti che bastino a sollevare l'acqua, la quale viene successivamente esibita alla Luna, per la rotazione diurna; e perciò il massimo flusso accade dopo la culminazione, ed il massimo riflusso succede quando la Luna è già salita un poco sopra o discesa sotto l'orizzonte. E qui si noti che tal ritardo può es-

sere ancora modificato dalle condizioni locali. Ma anche il Sole, sebbene tanto più lontano, per la sua grande massa produce una qualche marèa, sebbene meno sensibile; ed ora rinforza, ora indebolisce l' effetto prodotto dalla Luna. Per la qual cosa le marée riescono più sensibili non solo quando la Luna è perigea, ma anche quando è nelle sizigie; e sono invece più deboli quando la Luna è apogea, e in quadratura.

40. Tendenza al parallelismo degli assi di rotazione.— La precessione degli equinozii può essere spiegata anche dalla tendenza, che ànno di porsi paralleli fra loro gli assi di rotazione. Anzi la tendenza medesima somministra un altro *mezzo termine* per dimostrare il moto diurno della Terra.

I. SCOLII. 1° È convenzione ricevuta che la retta, intorno alla quale un corpo gira uniformemente, cioè l'asse di rotazione, venga rappresentato da una linea; la cui giacitura corrisponda alla direzione dell'asse medesimo, e la cui lunghezza sia proporzionale alla velocità di rotazione.

2° Un'altra convenzione si è che la direzione della detta retta indichi il senso della rotazione; il che si ottiene col condurla verso quella parte, ove un occhio (che per avventura colà si ritrovasse) vedrebbe la rotazione effettuarsi *destrorso*, cioè nel senso, in cui si avanzano gli indici di un orologio, o s'introducono le viti nelle madreviti.

II. TEOREMA. *Se un mobile venga sottomesso a due rotazioni rappresentate da due rette ad angolo, concepirà una rotazione unica risultante, che potrà essere rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo costruito sugli assi delle due rotazioni componenti*

Dichiarazione. Sia un mobile M (fig. 122.) sollecitato da due rotazioni, dirette secondo le frecce A e B, e veloci angolarmente come v e v', ossia proporzionalmente ad MP, ed MQ: la rotazione risultante, che il mobile in fatto prenderà, sarà rappresentata da MR; ossia dalla diagonale del parallelogrammo MPRQ formato sui lati MP, ed MQ. Il che significa I. che tutti i punti della MC avranno una velocità angolare nulla, ossia non faranno che girare sopra se stessi. II. La velocità w angolare risultante starà alla velocità v di una, per esempio MA, delle due rotazioni componenti come MR:MP.

Dimostrazione della 1ª *parte.* È evidente che l'estremo M della diagonale, il quale si trova tutto ad un tempo su di ambidue gli assi componenti, non soffre veruno spostamento angolare. Altrettanto accade di un punto qualunque, per esempio R, della MC. Infatti il punto R, in virtù della rotazione intorno all'asse MA, tende ad abbassarsi sotto il piano AMB; e in un brevissimo tempetto t si abbasserebbe della quantità $t.v.$RE, essendo RE la perpendicolare condotta da R sull'asse MA. Giacchè lo spazio è uguale al tempo moltiplicato per la velocità; e questa è data dal prodotto della velocità angolare pel raggio di rotazione. Parimente in virtù della rotazione intorno all'asse MB, il punto stesso R tende ad innalzarsi nel tempo stesso t sopra al piano AMB di una quantità $t.v'.$RF; ove RF sia la distanza di R dall'asse MB. Or bene; $t.v.\mathrm{RE} = t.v'.\mathrm{RF}$, ossia $v.\mathrm{RE} = v'.\mathrm{RF}$. Imperocchè i due triangoli rettangoli EPR, FRQ, nei quali gli angoli FPR ed FQR essendo uguali ad un terzo EMF, sono uguali fra loro, dànno per la loro somiglianza la proporzione $\mathrm{RE} : \mathrm{RP} :: \mathrm{RF} : \mathrm{RQ}$. Ma $\mathrm{RP} = \mathrm{MQ}$; $\mathrm{RQ} = \mathrm{MP}$. Dunque $\mathrm{RE} : \mathrm{MQ} :: \mathrm{RF} : \mathrm{MP}$, ed $\mathrm{MP} : \mathrm{MQ} :: \mathrm{RF} : \mathrm{RE}$. Ora $\mathrm{MP} : \mathrm{MQ} :: v : v'$. Dunque $v \times \mathrm{RE} = v' \times \mathrm{RF}$. Il che indica come, in virtù delle due rotazioni, il punto R dovrà innalzarsi ed abbassarsi nel tempo stesso della medesima quantità; quindi resterà immobile.

Dimostrazione della 2ª *parte.* Si prenda a considerare un punto qualunque G situato in uno MB degli assi componenti. Esso, per la rotazione MQ, non soffrirà alcun movimento angolare intorno a quest' asse; intanto che in un tempetto t, in virtù della rotazione MA, descriverà sotto il piano AMB una perpendicolare uguale a $t.v.$GH; essendo GH la distanza sua dall' asse di rotazione MA. Il medesimo punto, per la rotazione risultante, nel tempo stesso descriverà lo spazio $t.w.$GK; ove GK indica il raggio della rotazione. Ora poichè il punto G per una delle due rotazioni componenti starebbe fermo, nella composizione delle due non perderà e non acquisterà verun grado di velocità; ossia i due detti spazii saranno uguali. Sussisterà quindi l'equazione $t.v.\mathrm{GH} = t.w.\mathrm{GK}$, e la proporzione $\mathrm{GH} : \mathrm{GK} :: w : v$. Ma $\mathrm{GH} = \mathrm{MG}.\ \mathrm{sen.}\ \alpha$;

CK = MG. sen. β. Dunque $w : v$ :: sen. α : sen. β. Ma nel triangolo MRQ, sta MR : RQ :: sen. MQR : sen. β. Siccome RQ=MP, e di più sen. MQR= sen. RQF=sen. PMQ=sen. α; così MR : MP :: sen. α ; sen. β. Per conseguenza sarà anche

$$w : v :: MR : MP.$$

III. COROLLARII. 1° Se ad una massa, che ruota intorno ad un perno orizzontale, s'imprime una prolungata pressione, la quale tenda a fare rotare tutta la massa ed il perno intorno ad un asse verticale; detto perno prima si piegherà e si collocherà in posizione verticale, e poi ubbidirà alla pressione. Rappresenti HK (fig. 123.) un *toro* di ottone, cioè un anello massiccio riunito al suo perno MN con un disco metallico; insomma un corpo di figura simile all'omonimo membro delle basi architettoniche, e trapassato da un perno MN solido. Supponghasi che un toro sì fatto giri in un piano verticale intorno al suo perno nel senso delle frecce H,K, e che da una forza continua venga spinto a girare in un piano orizzontale secondo le frecce Q,S. L'asse della prima rotazione, secondo la convenzione (I.2°) verrà espresso da AX, e quello della seconda da CY. Si trasporti questo secondo al centro A di rotazione, cioè in AZ, e fatta la debita composizione delle rotazioni, la AR ne rappresenterà l'asse della rotazione risultante. E però il corpo rotante tenderà a piegarsi secondo quest'ultimo asse; e quando non ne sia impedito, realmente il perno MN si porterà sulla detta diagonale AR. Allora, se la pressione orizzontale persevera, si farà una nuova composizione del primo asse verticale AZ coll'asse risultante AR; e di nuovo il perno si piegherà e collocherà sulla nuova diagonale AR', e così di seguito. E tal movimento sarà tanto più veloce, quanto più energica sarà la

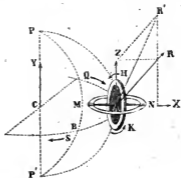



Fig. 123.

forza continua, o più lunga la retta, che rappresenta l'asse della rotazione, cui essa tende a produrre. Quando finalmente la risultante combacerà con AZ, il perno cesserà di piegarsi; e poichè gli assi delle due rotazioni saranno allora coincidenti, la pressione non indurrà più veruna conversione nel perno, ma la rivoluzione della massa. Il corollario è confermato dal fatto. Sia tt' (fig.125.) lo stesso toro in bronzo (rappresentato a parte in T come è veduto di taglio), il cui perno giri intorno a due punte annesse ad un anello CC'. Questo anello porta due coltelli CC' saldati alle estremità di un diametro normale al perno del toro, per mezzo dei quali esso riposa su due cuscinetti di un secondo anello dd', sospeso ad un filo non torto F F', ed appoggiato leggermente con una punta o sopra un piano sottoposto. Ogni cosa è qui disposta in guisa, che il centro di gravità di tutto il sistema giaccia sull'asse del toro, e sulla verticale passante per la punta o inferiore. Questo strumento, che consiste essenzialmente in un toro, il cui asse è mobile in tutti i sensi, chiamasi *giroscopio*. Or bene: spingendo orizzontalmente con un dito la parte sinistra d dell'anello esterno, ossia tentando d'imprimergli una rotazione, il cui asse giaccia verticale, e sia diretto verso l'alto, l'anello interno tat' si piega. Se questo invece di terminare in due coltelli, porti due punte infilate nell'anello esterno, il perno tt' del toro si collocherà in posizione verticale. Da indi in poi l'anello esterno dd' cederà all'impulso, e girerà intorno alla verticale.

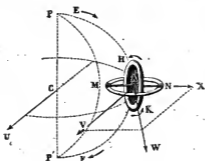



Fig. 124.

2° Dunque se ad una massa, che ruota intorno ad un perno orizzontale, imprimesi una pressione, la quale tenda a farla girare verso il basso intorno ad un altro asse orizzontale; il

detto perno si piegherà, si porrà nella direzione dell' altro asse, e dopo ciò la massa principierà a girare in quel piano verticale, in cui è spinta dalla forza continua. HK (fig. 124.) rappresenti il toro girante intorno all' asse AX, e CU indichi l' asse orizzontale della rotazione impressa dalla forza continua, la quale lo spinge a discendere secondo le frecce E, F; il detto asse CU si trasporti, parallelamente a se stesso, nel centro del toro, e venga espresso da AV. La risultante delle due rotazioni verrà mostrata dalla orizzontale AW; e però il perno assumerà tal posizione. Quindi accaderanno successivamente tante altre composizioni delle rotazioni, e ripiegamenti del perno: finchè questo non siasi posto sopra AV. Dopo ciò la massa potrà circolare verticalmente intorno a C nel senso delle frecce E, F. Anche questo (fig.125.) viene confermato dal fatto. Dappoichè spingendo in basso con un dito l'estremo anteriore t' del perno tt', o fissandovi una piccola massa pesante, il perno stesso si metterà a girare orizzontalmente e sinistrorso per chi lo riguarda. Ove per altro il dito seguiti sempre a premere sul medesimo punto, l' asse CC' di questa rotazione continuamente si sposta; e però il perno gli va sempre appresso, senza raggiungerlo mai, cioè gira incessantemente. È questo il caso del curioso fenomeno del toro girante (fig.126.), il quale va intorno senza cadere ad onta che sia posato so-

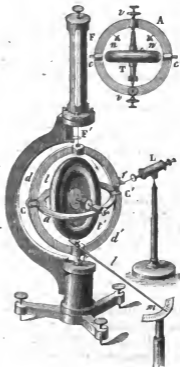



Fig. 125.

pra una punta (o) esistente a qualsivoglia distanza dalla linea di direzione.

3° Dunque le rotazioni, che si tenta d'imprimere ad un dato corpo, tendono al parallelismo ed alla consentaneità. Infatti, come si è veduto nei due corollarii antecedenti, il risultato della forza continua, diretta ad imprimere una seconda rotazione, è di collocare il perno del toro in posizione parallela all'asse della rotazione seconda; ed inoltre il perno nel piegarsi, per il parallelogrammo delle rotazioni, si dirige da quella parte, in cui le due rotazióni possono effettuarsi nel senso medesimo, cioè ambidue destrorso dell'osservatore. Volendo imprimere al toro girante del giroscopio (fig.125.) una rotazione diversa dalla sua, se ciò si tenti con un colpo istantaneo, incóntrasi una resistenza invincibile; se poi si tenti con una pressione continuata, ne conseguono le conversioni sopra descritte. In ogni caso non riesce d'imprimergli una rotazione se non a condizione, che questa sia consentanea e parallela alla prima.

4° Dunque il giroscopio può servire a determinare ad un di presso la direzione del meridiano, e la latitudine d'un sito qualunque, nell'ipotesi del moto diurno della Terra. Infatti questo supposto movimento tende ad imprimere una seconda rotazione al toro girante. Quindi il perno di questesso per la legge del parallelismo dovrà porsi nel piano del meridiano, e parallelamente all'asse terrestre. Dunque quando il detto perno avrà presa la sua posizione d'equilibrio, il piano che passa pel suo asse e per la verticale sarà quello del meridiano; e l'angolo formato dall'asse medesimo col piano dell'orizzonte sarà uguale alla latitudine del paese.

5° Dunque la Terra gira diurnamente intorno a se stessa. È un fatto che il giroscopio mostra il movimento sopraddetto, pel quale il perno del toro tende a porsi parallelo all'asse terrestre. Ma questo moto non può derivare che dalla rotazione della Terra. Dunque ecc.

6° Dunque la Terra pel rigonfiamento dell'equatore deve soggiacere al movimento di precessione. Se l'attrazione solare sul menisco terrestre costituente il detto rigonfiamento agisse sola, e la Terra fosse immobile, la linea dei poli do-

vrebbe finalmente porsi normale al piano dell' eclittica. Perciò l' attrazione solare su tal rigonfiamento tende a produrre una rotazione della Terra intorno ad un asse, che si trova sempre nel piano dell'eclittica. Ora questa rotazione, componendosi con quella intorno alla linea dei poli, deve generare un asse risultante, collocato nel piano che passa per l'asse della Terra, e taglia l'eclittica nella retta normale al raggio vettore. Per conseguenza la linea dei poli deve tendere a collocarsi nella direzione di quest'asse, senza mai pervenirvi; perchè non sono fissi gli assi componenti: e perciò dee muoversi con una estrema lentezza, descrivendo una superficie conica intorno ad una normale all'eclittica.

IV. ALTRI SCOLII. 1° I descritti fenomeni, e le dimostrazioni che ne fluiscono, debbonsi ad un' esperienza fortuita. Leone Foucault, avendo un giorno del 1851 attaccato all' albero del torno un' asta elastica, vide che le vibrazioni impressele non cangiavano piano, anche quando l'asta rapidamente girava intorno al suo asse. Questo fatto gli fece sperare di mettere in evidenza la rotazione della Terra, per l'apparente deviazione del piano d'oscillazione di un pendolo. E nell' anno stesso prima nelle sale dell'osservatorio di Parigi, poi in grande sotto la cuppola del Panteon, e quindi anche in Roma [1] fu verificata tal deviazione, che noi abbiamo descritto

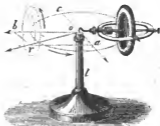



Fig. 126.

1 Quando nel 1851 furono istituite a Parigi, e ripetute qui ed altrove le sperienze della deviazione del pendolo, si assegnò una lieve e *costante* differenza fra la deviazione empirica, e la teorica. Ma avendo io misurato gli archi di deviazione con un metodo assai più esatto di quanti sieno stati (per quel che io ne sappia) antecedentemente adottati, mi sono dovuto convincere che la detta differenza è da principio minore, ma successivamente *crescente*. Gli altri misurarono gli angoli dalla larghezza della breccia, fatta sopra un anello circolare di cenere dalla punta metallica sottoposta alla massa pesante, e dall' ampiezza di escursione dell' imagine del filo metallico prodotta nel campo di un canocchiale. Pre-

nella Prima Parte (41.II.3°). Il fenomeno era già stato avvertito fin dal 1660 dagli Accademici di Firenze; ma questi non ne trassero, come si è fatto recentemente, in prova della rotazione terrestre quel nuovo argomento; che è più

scindendo da ogni altra cagione d'inesattezza, che (come ognuno di leggieri s'accorge) dev'essere inevitabile in queste maniere di misurazione, si rifletta che le oscillazioni del pendolo vengono mano a mano restringendosi, e che presto il filo si mette a scorrere sulla superficie di un cono a base d'ellisse sempre meno eccentrica. Il metodo da me immaginato è il seguente. Si solleva dal suolo sopra quattro piedi ben fermi un parallelogramma orizzontale solido ABCD (fig 127.), i cui lati più lunghi sono paralleli al piano del meridiano, e servono di guida a due corsoi, che possono trasportarsi parallelamente a se stessi fino al mezzo del parallelogrammo. Tanto le due guide AB, CD, quanto i due corsoi *mn*, *rs* sono muniti di scale millimetriche, ed in mezzo al parallelogrammo passa il filo del pendolo P, quando questo è in equilibrio. Prima di fare oscillare il pendolo si portano in mezzo i due corsoi, fino a che rimangano separati da una riga d'aria poco più larga del diametro del filo; e quindi si fissano le misure in guisa che i due zeri delle misure tanto dei lati più lunghi AB,CD, quanto dei corsoi *mn, rs* restino incontro all'asse del filo. Allora s'allontanano i due corsoi; ed abbracciata la palla pesante con un filo di seta, si fissa questesso in maniera, che il filo metallico passi esattamente incontro allo zero del corsoio; si aspetta che la palla sia ben ferma; e finalmente si abbrucia il filo di seta, che la ritiene fuori della verticale. È manifesto che a questo modo il primitivo piano d'oscillazione passerà per i due zeri dei corsoi. Quando poi dopo due o tre minuti l'oscillazione si sarà ristretta, bisogna avvicinare verso il mezzo i due corsoi *m'n'*, *r's'* di tanto che il filo oscillante, negli istanti delle sue due elongazioni massime, quasi li tocchi. Allora notato il tempo, si guarda a qual millimetro corrispondano i due vertici dell'asse maggiore dell'ellisse percorsa dal filo, ossia incontro a qual numero venga quasi a battere il filo, e questo è il *seno* della deviazione: poi si legge incontro a qual millimetro delle guide ritrovinsi i corsoi, e questo è il *coseno* della deviazione. Dividere il seno per la radice quadra della somma dei quadrati di seno e coseno, ossia pel raggio; ritrovare nelle tavole prima il logaritmo del quoto, che è il seno in parti di raggio, e quindi l'arco corrispondente; ed in fine dividere quest'arco pel tempo è un'operazione materialissima e sicura. Il pendolo da me adoperato è una palla di kilogrammi 12,5; ed è sostenuto da un filo di ferro lungo 6 metri, e del diametro di millimetri 1,8. Il filo è saldato a due maschi, fermamente invitati uno alla palla, l'altro ad una madrevite murata alla volta della sala delle esperienze. Dando alla prima oscillazione l'ampiezza di un metro, nel tempo della lezione si à una deviazione sensibile a tutti gli spettatori; mentre supera 3 centimetri a ponente, e 3 a levante.

palpabile sì di quello di Poisson, desunto dalla deviazione dei proiettili verso destra dell'osservatore collocato al punto di partenza, e rivolto alla traiettoria; come di quello di Reich di Freyberg consistente nella deviazione verso Est di metri 0,0283 (poco differente dalla deviazione teorica data da 0,0276) dei gravi cadenti dall'altezza di 158,5.

2° Dal pendolo al giroscopio il passaggio è stato sollecito, e naturale. Se un pendolo descrivesse una circonferenza intera, il piano d'oscillazione dovrebbe mantenersi parallelo; lo stesso accadrebbe di un' infinità di pendoli uguali legati fra loro, e giranti intorno ad un asse perpendicolare al piano comune di oscillazione. Or questo è un anello, che gira intorno a un asse perpendicolare al suo piano, anzi è il toro girante. Ma il merito dell'invenzione dei bei fenomeni del giroscopio,

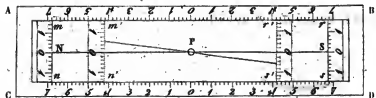



Fig. 127.

e delle sue utili applicazioni alla scienza, non è dovuto al solo Foucault, ma anche a Sire, Persou, e Bohnemberger.

41. Chiusa. — Nello studio della Stereodinamica, che qui chiudiamo, non può non averci colpito la mirabile semplicità delle leggi, colle quali il Creatore à preparato i bei fenomeni dell'urto dei corpi, ci largisce gli svariati vantaggi del peso dei gravi, modera il mirabile corso degli astri. Ottiene Esso quei fenomeni colla resistenza e colla reazione: produce la caduta coll'attrazione, che spinge i ponderabili uno verso l'altro: contiene ciascuna stella al posto assegnatole, manda in volta i pianeti e le comete per le loro orbite, fa eseguire a ciascun sistema la parte, che deve sostenere nella gran macchina mondiale per l' intreccio di due sole forze; una continua e centrale, che è l'attrazione medesima; l'altra istantanea, cui impresse loro, quando dopo averli creati, li lanciò nello spazio.

CAPO SECONDO.

EQUILIBRIO E MOTO DEI LIQUIDI.

42. Argomento del presente Capo. — Le condizioni necessarie affinchè i liquidi riposino in equilibrio, o muovansi correndo pei tubi e canali; non che le pressioni, che essi medesimi esercitano nel primo caso, e le velocità onde sono animati nel secondo; sono il soggetto, intorno a cui deve aggirarsi questo Secondo Capitolo della Fisiometria.

ARTICOLO I.

IDROSTATICA.

43. Teorema d'Archimede. — Avendo già trattato nella Parte Sperimentale della pressione dei liquidi, e sotto il riguardo della sua uguaglianza, quando è estrinseca, e sotto quello della sua energia, quando è il peso stesso del liquido ed esercitasi sopra il fondo o le pareti del vaso, in cui esso liquido è contenuto; non ci resta che a parlare delle pressioni esercitate dal medesimo sulle pareti dei corpi immersivi. Il che si assomma nel così detto teorema d'Archimede, che può enunciarsi nel seguente modo.

Fig. 128.

I. TEOREMA. *Il peso di un solido immerso in un liquido è sostenuto per quella porzione, che uguaglia il peso di un ugual volume del liquido stesso.*

Dimostrazione 1ª. La verità del teorema diviene manifesta al solo riflettere che il corpo immerso dev' essere soggetto alle pressioni stesse, dalle quali era equilibrato e sorretto il peso del liquido da lui rimosso: e però anche il suo peso verrà in pari porzione sostenuto. Più chiaramente. Sia

(fig **128**.) un parallelepipedo (AB) immerso nell'acqua in modo che la sua faccia superiore giaccia parallela al livello (D) del liquido. Dalle cose dimostrate nella Parte Seconda Sez.I.(**40**.) si sa che le pressioni sofferte dalle facce laterali (e perciò verticali) del parallelepipedo sono tutte uguali e contrarie ; e per conseguenza elidonsi a vicenda. Ma la pressione, sofferta dalla faccia superiore (A), è uguale al peso di

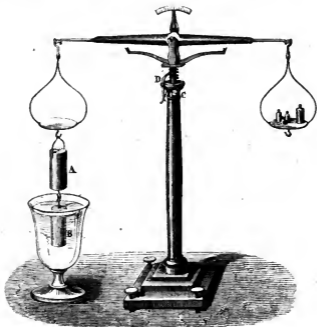



Fig. 129.

un prisma d'acqua di base uguale alla detta faccia (A), e di altezza pari alla profondità (DA) della medesima: quella poi sofferta dalla faccia inferiore (B) uguaglia il peso di un prisma acqueo della stessa base (B), ma di altezza maggiore (=DB). Dunque la spinta in su, cioè quest' ultima pressione supera la prima di tanto, quanto è il peso di un prisma d' acqua di base ed altezza pari a quella del parallelepipedo. Per la qual cosa questo eccesso sostiene altrettanto peso del solido.

Dimostrazione 2ª. A provare esperimentalmente quest'essa verità fondamentale, si appende ad un braccio della *bilancia* così detta *idrostatica* (fig.129.) un vasello cilindrico (A), ed a questo un cilindro massiccio (B) di volume eguale alla capacità del detto vasello; poi si stabilisce l'equilibrio, e si fa discendere l'asta della bilancia, affinchè il cilindro (B) si tuffi completamente nell'acqua. Con ciò l'equilibrio si rompe; ma per ristabilirlo basta empire con acqua il piccolo vase, ossia basta aggiungere dalla parte del solido immerso un peso uguale a quello dell'acqua, che venne scacciata per l'immersione del solido.

II SCOLIO. Come il peso (fig.130.) di un corpo (ADB) si concepisce tutto riunito nel suo centro di gravità (G), così tutta la spinta, che il liquido esercita a sostenere il peso del corpo immerso, si deve intendere applicata (fig. 131.) nel centro di gravità (C') di quella figura astratta (ADB), che rappresenta la parte immersa del solido, o se vuolsi (fig.130.) in quel punto (C), che sarebbe il centro di gravità del liquido, ove questo seguitasse ad occupare il posto (EDF), donde è stato cacciato dal corpo immerso.

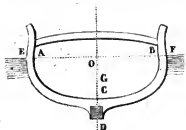



Fig. 130.

III. DEFINIZIONI. 1ª Il punto (C) ove si ritroverebbe il centro di gravità di quella porzione e figura (EDF) di liquido, che è stata espulsa dal corpo immersovi, è chiamato *centro di spinta verticale.*

2ª Quella linea (DCG), la quale passa pel centro di spinta (C), e pel centro di gravità (G) di un galleggiante collocato nella posizione d'equilibrio, dicesi *asse primitivo.*

3ª Viene denominato *metacentro* (fig.131.) il punto (M), in cui l'asse primitivo (CG) s'interseca colla verticale (C'M), sollevata dal centro di spinta (C') di un galleggiante ritolto dalla sua posizione d'equilibrio.

IV. COROLLARII. 1° Dunque per l'equilibrio d'un corpo tutto

sommerso in un liquido richiedesi I. che il peso dell'immerso uguagli il peso del liquido spostato; II. che il centro di spinta stia nella linea di direzione, cioè che il centro di gravità del solido, ed il centro di spinta del liquido ritrovinsi nella stessa verticale. Imperocchè sotto queste condizioni solamente le due forze saranno uguali e direttamente opposte.

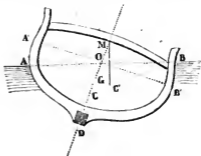
2° Se il peso del corpo immerso supera quello di un egual volume del liquido, in cui è tuffato, l'equilibrio sarà impossibile; ma l'immerso cadrà per una forza uguale alla differenza dei detti due pesi.

3° Dunque due o più liquidi di diverso peso specifico si disporranno nel medesimo vase l'uno sotto l'altro, secondo il peso loro, ponendosi più in basso il più pesante.

Fig. 131.

4° Se il solido o per la sua piccola densità, o per la disposizione delle sue parti esterne sia atto a spostare con poca sua massa molto liquore, galleggerà; sporgendo sul liquido con tanta parte di sè, che il peso del minor volume di liquido rimosso riesca uguale al peso di tutto il galleggiante. Perchè solo in tal caso la spinta in su uguaglierà il peso del solido.

5° Ove il liquido spostato pesi tanto quanto il solido immersovi, questo resterà fermo a qualunque altezza si collochi dentro il liquido.

V. ALTRI SCOLII. 1° In quest'ultimo caso e nell'antecedente il corpo prima di porsi in equilibrio non solo girerà intorno a se stesso, finchè il centro di spinta giaccia nella linea di direzione; ma anche finchè il centro di gravità rimanga sotto al metacentro. E questa condizione è indispensabile per la *stabilità* (**13**.I.1°) dell'equilibrio. Dappoichè ogni volta che (fig.131.) il corpo (ADB) sia mosso, e così il centro (C') di spinta esca dalla linea di direzione, se il metacentro (M)

starà più alto del centro di gravità (G), la tendenza di questo a discendere e la spinta stessa del liquido rivolgeranno il galleggiante in direzione contraria all' inclinazione da lui presa. Quando in vece (fig.132.) il centro di gravità (G) stesse sopra al metacentro (M), l'equilibrio sarebbe *instabile* (**13.** 1.2ª): perchè ad ogni urto, che ritogliesse il galleggiante dalla sua posizione d'equilibrio, le due dette forze tenderebbero a farlo inclinare di più, ed a rovesciarlo. Ove poi il centro di gravità coincidesse col metacentro, vi sarebbe equilibrio; ma le due forze non tenderebbero, come nel primo caso, a rendere verticale l'asse primitivo (CG).

2° Per mezzo di un piccolo apparecchio, che dai Francesi è chiamato *ludione*, e da noi *diavolo di Cartesio*, soglionsi riprodurre i fenomeni del galleggiamento e della sommersione. Esso consiste in un cilindro di vetro (fig.**133.**) munito di stantuffo e contenente dell'acqua, nella quale si fa galleggiare uno smalto sotto forma di piccolo demonio, che à in basso un sottil foro

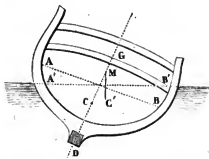



Fig. 132.

(*a*), e dentro contiene aria e tanto di acqua da pesare poco meno di un egual volume di questessa. Al presente il figurino suol farsi massiccio, in forma di una caricatura qualunque, o di una cariatide in atto di sostenere sul capo un' ampollina forata in basso (*a*). Deprimendo lo stantuffo l'aria si condensa, preme l' acqua, e questa l'aria dell' ampolla. Ond'è che un poco d'acqua introducesi nella figura, la quale divenendo così più pesante non può più galleggiare e si sommerge. Sollevando quindi lo stantuffo, l'aria dell'ampollina per elasticità espelle un poco di liquido, e ne segue alleggerimento ed ascensione del figurino.

3° Non molto dissomigliantemente fanno i pesci, la maggior parte dei quali nell'addomine sotto la spina dorsale porta un

palloncino pieno d'aria chiamato *vescica natatoria*, e con uno sforzo muscolare la comprime o la dilata: con che diminuisce o cresce il volume del pesce, e così questo scende o sale nell'acqua.

4° Il corpo umano è più leggiero di un ugual volume di acqua, specialmente se sia salata; e però è sempre possibile all'uomo tenersi al livello dell'acqua. Ma il suo capo, al contrario di quello che avviene ne' quadrupedi, pesa più delle membra inferiori; e quindi, finchè la bocca resta fuori dell'acqua per la respirazione, l'equilibrio è instabile, ed è necessario usare con arte della forza de'muscoli, ad impedire che il corpo si capovolti per assumere la posizione d' equilibrio stabile.

Fig. 133.

43. Peso specifico, areometri, e pesaliquori. — Si fa un'importante applicazione del principio d'Archimede nella ricerca del peso specifico dei corpi, e del grado di concentramento delle dissoluzioni acide, saline, o alcooliche.

I. DEFINIZIONI. 1ª Spesso per *peso specifico* di un corpo s'intende il numero astratto, esprimente quante volte il peso del medesimo corpo è maggiore o minore di quello di un altro, preso per termine di confronto.

2ª Gli strumenti, che servono a determinare il peso specifico dei solidi o dei liquidi, o il grado di concentramento delle dissoluzioni, ànno il nome generale di *areometri*.

3ª Diconsi *areometri a volume costante* quelli, che si adoperano immergendoli nei varii liquidi fino ad un punto fisso; e questa operazione à nome *affioramento*.

4ª Sono denominati *a peso costante* quegli areometri, i

quali si lasciano galleggiare nei diversi liquidi quanto esige il loro peso in confronto a quello del liquido.

5ª Gli areometri, che non sono atti a misurare il peso specifico, ma servono a far conoscere il grado di concentramento delle dissoluzioni acide, saline, spiritose, ecc. prendono rispettivamente il nome di *pesacidi*, *pesasali*, *pesaspiriti*, *pesalatte*, *pesavino*, ecc., ed in genere di *pesaliquori*.

6ª Dicesi *areometro universale* quel pesaliquori, che serve bene tanto per le dissoluzioni più pesanti dell'acqua, quanto per le più leggiere.

7ª Sotto nome d'*alcoolometro* s'intende un areometro capace di segnare la quantità di alcoole contenuta nei diversi liquidi spiritosi.

Fig.134.

8ª Gli areometri, graduati in modo da far conoscere pel loro grado d'immersione la densità relativa di un liquido, portano il nome di *densimetri* o di *volumetri*.

II. SCOLII. 1° Il termine di confronto, per quello che riguarda il peso specifico dei solidi e dei liquidi, è l' acqua distillata a 4° C; per li gassi poi è l'aria secca, a 0°, ed alla pressione di 76 centimetri d'idrargiro o di un'atmosfera.

2° Per determinare il peso specifico di un aeriforme, si piglia un pallone di vetro di 3 o 4 decimetri di diametro, si vuota d'aria, e si pesa; poi s' empie del dato vapore ben secco, alla temperatura 0°, e sotto 1 pressione atmosferica. Con ciò si ottiene il peso assoluto di quell'aeriforme. Al modo medesimo si determina il peso di un ugual volume d'aria sotto le dette condizioni. Il peso specifico del gasse è il quoto, che nasce col dividere il peso suo per quello dell'aria.

3° Ma ove si tratti del peso specifico dei solidi o dei liquidi, conviene ricorrere al principio d'Archimede. Infatti trattandosi di un solido, bisogna prima cercare colla bilancia idrostatica qual porzione del suo peso rimanga sostenuta dall'acqua in cui viene immerso, cioè quanto pesi un ugual vo-

lume di acqua; poi si deve dividere il suo peso assoluto per quel peso dell' acqua: il quoto è il peso cercato. A cagion d'esempio 7,821 grani d'oro pesano nell'acqua grani 7,415. Dunque un ugual volume d' acqua pesa 0,405; e però il peso specifico dell'oro è 7,821 : 0,506 = 19,26....

4° Relativamente ad un dato liquido, prima si pesa in esso un solido qualunque di peso noto, e si segna il peso del liquido in volume uguale a quello del solido; poi questo s'immerge nell'acqua stillata, e si determina il peso di un ugual volume di questessa; ed infine si divide il peso del dato liquido per quello di un ugual volume d'acqua. Il quoto è il peso specifico cercato.

Fig. 135.

5° Ma la determinazione del peso specifico riesce più spedita per mezzo degli areometri. Principieremo dal descrivere quelli a volume costante. Uno è l'areometro di Fahrenheit. Consiste (fig.134.) in un lungo palloncino (A), che suol farsi di vetro per adoperarlo con qualsivoglia liquido, sormontato da un collo che porta un bacinetto (B). e terminato nella parte inferiore da un bulbo (Z) con idrargiro o migliarina ad uso di zavorra per la stabilità dell'equilibrio. Immergesi lo strumento successivamente nell'acqua e nel liquido dato, caricando sempre il bacinetto coi pesi necessarii per l'affioramento. Il peso noto dello strumento, più i pesi aggiunti per farlo affiorare, debbono valere insomma quanto è il peso del liquido spostato. Dunque coi due sopraddetti affioramenti si ottiene il peso e del dato liquido e di un ugual volume di acqua di confronto; e, col dividere il primo pel secondo, il peso specifico del liquido.

6° Un altro areometro a volume costante è quello di Nicholson (fig.135.): il quale areometro è costituito da un cilindro cavo di latta, che porta inferiormente un cono (C) pieno di piom-

bo, ad uso di zavorra, e si può adoperare anche pei solidi; e non solo pei più, ma eziandio ma per i meno pesanti dell'acqua. A quest'uopo si colloca prima il solido sul bacinetto (A), e con aggiunta di pesi si fa l'affioramento. Poi il solido si mette sul cono o secchietto, e se sia più leggiero dell'acqua si cuopre con una gratella di fili di ferro annessa al secchio; quindi con aggiunta di altri pesi si fa di nuovo affiorare lo strumento. I pesi aggiunti pel secondo affioramento rappresentano il peso di un ugual volume di acqua: e quelli aggiunti pel primo, ove si sottraggano a quel peso

Fig. 136.

(che dev' essere cognito), il quale fa affiorare da sè, dànno il peso assoluto del solido [1].

7° Gli areometri a peso costante sono costituiti da un tubo chiuso di vetro, che inferiormente prende la forma di una sfera allungata, e termina in un bulbo con zavorra. Sopra lo stesso tubo, o in una lista di carta postavi dentro, si segnano le divisioni, cioè la scala. Tali strumenti si adoperano col porli a galleggiare nel dato liquido; e secondo che s' immergono fino ad un segno più o meno alto della scala, si giudica della densità del liquido, o del concentramento della soluzione.

8° Il pesaliquori più usitato è quello (fig.136.) di Baumé, che à una scala convenzionale stabilita nel seguente modo. Pei liquidi men densi dell'acqua lo zero è segnato al punto d'affioramento in una soluzione di 10 unità in peso di sale comune secco, e 90 di acqua pura; al punto poi d'affioramento nell'acqua distillata si segna 10; dopo si divide lo

1 Se il solido sia solubile nell'acqua, allora prima se ne cerca il peso specifico in rapporto ad un liquido che non lo sciolga; poi si determina il peso specifico del liquido assunto; e finalmente si fa il prodotto dei detti due pesi specifici. Infatti il peso specifico cercato x sta al peso specifico d del liquido assunto, come il peso assoluto P del solido sta al peso p, che esso perde nel detto liquido. Ma la seconda ragione della proporzione esprime il peso specifico del solido, in confronto al liquido assunto: peso che diremo g. Dunque $x=dg$.

spazio intercetto in 10 porzioni uguali, e si prolunga la graduazione. Nei liquidi più densi dell'acqua il punto d'affioramento nell'acqua distillata si segna 0; e quello d'affioramento nella soluzione di 15 di sal comune in 85 dell'acqua stessa è segnato con 15; dividesi in 15 lo spazio compreso, e si prosegue la scala.

9° Non dissimile nella forma è il densimetro [1] del Gay-Lussac; il quale densimetro (come l'areometro universale) à un secondo bulbo o secchietto a zavorra, che si può levare e mettere. Colla zavorra aggiunta s'immerge nell'acqua pura fino ad un noto punto, in cui segnasi 100; poi si tuffa in un liquido di peso specifico noto, per esempio $^4/_3$, ed al punto dove affiora si segna 75. Poichè il volume V dapprima immerso sta al secondo v, come $\frac{4}{3}:1$; ossia $V:v::4:3$; così $v=\frac{3}{4}.V$; e però il residuo o la differenza dei due volumi sarà $\frac{1}{4}.V$, cioè 25. Si divide pertanto in 25 parti lo spazio frapposto fra 100 e 75, e si continuano le divisioni. Ond'è che se nell'acido solforico lo strumento affiora a 54, tanto pesa un volume = 54 di acido, quanto un volume = 100 di acqua. Ma a

Fig. 137.

1 A valutare il peso specifico di una piccola quantità di liquido, Rousseau propose recentemente di sovrapporre al cannello del densimetro (fig. 137.) una stretta capsula (A) di vetro, segnata fino alla capacità di un centimetro cubico. Il punto d'affioramento nell'acqua di confronto, che sta all'origine (B) del cannello, dà lo zero della graduazione; il punto poi d'affioramento coll'aggiunta nella capsula di un grammo o di un centimetro cubico di acqua distillata si segna con 20; e si divide in 20 parti uguali lo spazio compreso. Così ogni grado equivale a $^1/_{20}$, ossia a 0,05 di grammo. Per la qual cosa versato nella capsula un centimetro cubico, poniamo di bile, se lo strumento affiora a 20,5, è chiaro che il peso della bile sta a quello di un ugual volume d'acqua, come $0{,}05\times20{,}5:1=1{,}025$.

parità di peso assoluto i pesi specifici stanno fra loro inversamente come i volumi [1]. Dunque il peso specifico x dell'acido solforico sta a quello dell'acqua $= 1$, come 100 sta a 54; ed $x = 1.85$. Per i liquidi men pesanti, tolto il bulbo o secchietto, al punto d'affioramento nell'acqua distillata, cioè

1 La cognizione del peso specifico dei solidi serve alla soluzione di varii problemi. Diamone qualche esempio.

I. Si tratta di determinare le quantità di oro e di argento, che entrano nella composizione di una corona, senza guastarla. Questo problema si dice che fosse proposto dal Re Gerione ad Archimede.

Sia p il peso della corona, o del composto di oro ed argento, d la gravità specifica del composto medesimo, G il peso specifico dell'oro, e g quello dell'argento. Supponendo che la somma dei volumi dei componenti uguagli il volume del composto (il che non essendo esattissimo, si determina con esperimenti la correzione), siccome il peso assoluto diviso per lo specifico, o per la densità, ne dà il volume, così avremo $\frac{p}{d} = \frac{x}{G} + \frac{p-x}{g}$, ed $x = \frac{Gp.(g-d)}{d.(g-G)}$, ove x è il peso assoluto dell'oro, e $p-x$ quello dell'argento.

II. Dato il peso assoluto P di un corpo, che si vuol fare galleggiare, ed il suo peso specifico G; dato il peso specifico d del liquido, e g di una materia leggiera; si domanda quanta di questa materia debba aggiungersi perchè quel corpo galleggi.

Il volume del corpo dato è $P:G$, quello del corpo aggiunto è $x:g$, quello del liquido espulso è $P:G+x:g$; la massa del liquido o la sua spinta è $(P:G+x:g)\,d$. Ora questa massa in caso d'equilibrio deve essere uguale a $P+x$. Dunque $P+x = (\frac{P}{G} + \frac{x}{g})d$, ed $x = \frac{Pg(G-d)}{G(d-g)}$.

Trattandosi di un uomo del peso $P = 60$ kilogrammi, e di peso specifico $G = 1,11$; di sughero di densità $g = 0,240$; e di acqua $d = 1$; sarà $x = 1,88$.

III. Si domanda il volume di una statua di marmo di Carrara, il cui peso è kilogrammi 952, e la gravità specifica risulta (da sperienze istituite in una sua scheggia) uguale a 2,716.

Poichè un kilogrammo d'acqua occupa un decimetro cubico, il volume cercato sarà decimetri cubici $952:2,716 = 350,51$.

IV. Richiedesi il peso di un tronco di colonna di marmo serpentino dell'altezza di metri 2,25, del diametro 0,56 e di peso specifico 2,43.

Il volume del rocchio, secondo le regole di Stereometria, è decimetri cubici 554; e $554 \times 2,43 = 1346,22$ esprime in decimetri cubici il volume di una quantità d'acqua uguale in peso al detto rocchio, e però il peso cercato.

in basso, segnasi **100**: poi si aggiunge alla parte superiore dello strumento un quarto del suo peso. E perciò, essendo stato chiamato **100** il peso dello strumento, colla detta giunta otterrassi il peso **125**: e **125** dee segnarsi al nuovo punto d'affioramento; dividere in **25** parti uguali lo spazio intercetto, e continuare le divisioni fino all'estremità superiore [1].

44. Spiegazione dei fenomeni della capillarità.— SCOLII. 1° Annunciammo già trattando della capillarità nella Sezione Prima della Parte Sperimentale (**42.**), che l'innalzamento e la depressione del liquido proviene dalla forma concava o convessa del menisco; e che questa forma dipende dall'intreccio di tre attrazioni, le quali sono: quella del solido verso il liquido, quella del liquido verso se medesimo, e quella della Terra verso il liquido stesso. Anzi recammo un fatto in prova di tale spiegazione. Ora è tempo di confermarla col raziocinio matematico.

2° Una molecula liquida (fig. 138.) *m* è certamente sollecitata da tre attrazioni: da quella della gravità, che la trae nella

[1] In questi ultimi anni sono stati ideati da valenti Fisici italiani varii barometri fondati sul principio d'Archimede, ed assai utili per la Meteorologia. Nel fine del 1857 il ch. p. Secchi avea fatto rivivere e perfezionato il *barometro a bilancia*; che fu già proposto non si sa bene da chi, forse da Giovanni Minotto, o da Fontana, o da Wallis. Nel quale barometro (che è a vaschetta) la canna è mobile, superiormente rigonfiata, ed appesa ad un braccio di leva; di cui l'altro braccio è ad angolo, e carico di un contrappeso, che à l'ufficio di mettere la leva in posizione orizzontale, quando l'atmosfera esercita la pressione media. È chiaro che il prisma d'idrargiro, il quale à per base la bocca della canna, è sostenuto dalla pressione atmosferica, e non da nessun carico alla leva. Ma venendo ad aumentare tal pressione, la canna tende a tuffarsi maggiormente nella vaschetta per due forze: una è la pressione stessa, che esercitasi sul cielo della canna, l'altra è il peso di quell'anello di idrargiro, che è salito nel tubo, e gravita sul fondo anulare del suo rigonfiamento. Accade l'inverso quando la pressione atmosferica diminuisce. In ogni caso l'equilibrio è rotto; ma presto verrà a ristabilirsi; perchè il braccio ad angolo porta da sè il peso a maggiore o minore distanza dal fulcro (come si fa colla mano nella stadera); ed anche in piccola parte perchè una porzione del tubo s'immerge od emerge dall'idrargiro della sottoposta vaschetta. S'intende facilmente come l'annessione di un lungo indice a leva con lapis renda questo barometro atto a segnare in più ampia scala sopra una carta, che scorre sotto il lapis lentamente ed equabilmente, le variazioni della pressione atmo-

verticale mP; da quella del liquido, che la spinge obliquamente nella direzione mF; e da quella della lamina (L), che la spinge secondo mN. E qui possono farsi tre casi. 1. O le due attrazioni molecolari m'', ed mN sono in tal rapporto fra loro, che la risultante debba avere la direzione stessa mP della gravità; e allora la superficie del liquido in m sarà piana ed orizzontale: perchè, come sappiamo, la superficie dei liquidi è perpendicolare alla direzione della forza, dalla quale

sferica, in tante linee curve. Ma i gradi di tale scala debbono riuscire disuguali fra loro e dissimili, cioè senza proporzione ai gradi ordinarii; e però bisogna costruirla empiricamente, e ridurre le sopraddette curve.

Ad ovviare a tali inconvenienti il ch. p. Cecchi delle Scuole Pie due anni dopo imaginò un altro barometro, che fu da lui denominato *barometro areometrico a bilancia*. Anche questo è costituito da un tubo mobile terminato superiormente da una più ampia camera cilindrica, ed appeso ad un bilanciere: ma il principio, su cui fondasi, è quello d'Archimede. Dacchè le variazioni di peso, che induce nel sistema il cangiare della pressione atmosferica, sono ricompensate solamente dall'immersione od emersione della canna. È perciò che questa tiene saldato nella sua parte inferiore un manicotto, o lungo bicchiere di sottile lamina di ferro, di raggio alquanto maggiore di quello del superiore rigonfiamento. Ond'è che all'entrare di un nuovo millimetro d'idrargiro in quella camera, la canna solo per l'aumentata pressione atmosferica dovrà scendere tanto che la spinta del liquido, spostato dalla crosta tubulare costituita dalla differenza dei due sopraddetti raggi, uguagli la detta pressione. L'altro liquido spostato dal manicotto o bicchiere serve a sostenere il peso dell'idrargiro, che ad ogni discesa della canna vi sale, per mantenere la differenza dei due livelli (interno ed esterno) nella estensione voluta dall'energia della pressione atmosferica. Così i gradi di tale barometro saranno tanto più estesi dei comuni, quanto la differenza fra il raggio esterno del manicotto e quello pure esterno del rigonfiamento sarà minore. Il barometro del p. Cecchi segna le sue indicazioni sopra un sottoposto quadrante, per mezzo di un indice annesso all'asse di una carrucoletta, munita di due scanalature; in una delle quali avvolgesi una fettuccia non igrometrica attaccata al cielo della canna, e nell'altra un filo con un piccolo contrappeso. Questa succinta descrizione può bastare a farci intendere come un simile barometro possa rassomigliarsi ad un areometro attaccato ad un braccio di bilancia, ed immerso nel liquido; la spinta del quale non serve che a sostenere una

Fig. 138.

le loro molecule sono sollecitate. II. Oppure (fig. 138.) la seconda mN supera la prima mF; ed in tal caso la risultante mR si rivolge verso mN dividendo l'angolo NmP: e quindi l'elemento m della superficie, dovendo essere perpendicolare alla mR, s'inclina. E poichè il sopraddetto eccesso di mN sopra mF cresce in vicinanza della lastra L; così la superficie prossima alla lastra diviene concava. III. Ovvero (fig. 139.) finalmente mF è maggiore di mN; e la risultante mR si colloca dentro l'angolo FmP: e perciò la superficie m, col disporsi normalmente alla mR, diviene convessa.

parte del peso del sistema, essendone l'altra parte equilibrata dal contrappesi. Ma ogni areometro deve avere la sua zavorra per la stabilità dell'equilibrio. Ebbene; questa zavorra è costituita da una certa quantità d'idrargiro, che si versa nel manicotto, il cui fondo è trapassato a chiusura ermetica dalla canna galleggiante. Questo barometro da quattro anni funziona regolarmente a vista di tutti sotto la loggia degli Orgagna in Firenze.

Fig. 139.

Il dotto professore romano Tito Armellini, senza nulla sapere del barometro areometrico, dagli studii istituiti su quello a leva angolare fu condotto ad imaginare un barometro puramente areometrico, da lui chiamato *idrargiro-statico*. La canna (fig. 142.) si rassomiglia a quella di Firenze; ma non è affidata a verun bilanciere, o contrappeso, o fettuccia; galleggia invece sull'idrargiro della sottoposta vaschetta: nè il tubo o manicotto, da cui la parte immersa è circondata, viene riempiuto d'idrargiro, ma serve a contenere la migliarina destinata a regolare la prima immersione, e ad aumentarne il volume, affinchè con una canna ed una vaschetta di dimensioni non eccessive venga espulso tanto idrargiro, che basti a sostenere il peso di tutto lo strumento. Gli effetti poi della instabilità dell'equilibrio, vengono impediti per mezzo di un'asta, che sorge dal cielo della canna, e scorre verticalmente fra due carrucolette assai mobili. Anzi quest'asta medesima porta un lapis, e ne fa un barometrografo dotato di assai preziose prerogative. La prima è che le indicazioni sono proporzionali, ed arbitrariamente multiple delle ordinarie. Imperocchè la corsa della canna, per una determinata variazione della pressione atmosferica, deve essere tanto maggiore del *dislivello* dell'idrargiro, quanto più deve la canna affondarsi od emergere per ristabilire l'equilibrio. Or questa quantità di immersione o di emersione sarà tanto maggiore, quanto minore sarà la differenza fra il diametro interno del rigonfiamento superiore, e quello esterno del tubo o manicotto addizionale: perchè non

3° Ma come queste varie forme possono influire sugli innalzamenti e sulle depressioni? Le molecule del menisco concavo *abcd* (fig. 140.) sono sostenute in equilibrio dalle sopraddette forze, e però non esercitano pressione veruna sugli strati sottoposti; anzi esercitano sui più vicini la loro attrazione moleculare. Per la qual cosa uno strato qualunque *pmn*, preso nell'interno del tubo, soggiace ad una pressione minore di quella, che soffrirebbe senza il menisco; e però il liquido dovrà elevarsi nel tubo finchè la pressione interna sullo strato *mn* sia uguale alla pressione, che si esercita esteriormente sopra un punto qualunque *p* dello strato medesimo. Ove

è che l'idrargiro spostato da tale differenza quello, che sostiene il peso dell'aumentata pressione: chè il resto della grossezza della parete della canna e del manicotto serve a spostare un volume d'idrargiro uguale a quello salito sulla base anulare del rigonfiamento. Ma la detta differenza è evidentemente arbitraria. La seconda prerogativa è che il livello della vaschetta, o lo zero, è costante. Giacchè quanto è il peso dell'idrargiro, che in caso di aumentata pressione dell'aria ascende nella canna, e gravita sul fondo anulare del rigonfiamento, tanto è il peso dell'idrargiro che deve essere spostato per la discesa della canna stessa. Avviene qui ciò che succederebbe se in un bacile d'acqua si facesse galleggiare una barchetta di latta; e poi si versasse in questessa una certa quantità di liquido attinto dal vaso. Quell'abbassamento di livello, che seguirebbe la diminuzione dell'acqua, sarebbe compensato dall'innalzamento, che dovrebbe ottenersi per la maggiore immersione della barchetta stessa; appunto come accade nel *galleggiante di Prony*.

Fig. 140.

A me sembra di potere attribuire a questo pregevole barometrografo areometrico una terza proprietà, che non fu notata nella Memoria pubblicata dal suo inventore; ed è che in esso non occorre fare veruna correzione termometrica, almeno quanto alle dilatazioni del liquido. Giacchè in questa specie di barometri non si misura la lunghezza della colonna liquida, nè il peso di quel cilindro, che à per base la bocca inferiore della canna: chè questo peso in ultima analisi è sostenuto dalla pressione atmosferica, e non dalla spinta dell'idrargiro della vaschetta; ma si misura solo il peso del volume tubulare d'idrargiro, che circonda il detto cilindro. Ora tal peso non varia per temperatura: perchè di quanto si alleggerisce o s'aggrava specificamente l'idrargiro di quel tubo, di tanto aumenta, o diminuisce la quantità del medesimo. Altrettanto accade del liquido della vaschetta; dacchè, se esso sale per

poi il menisco sia convesso (fig.141.), le sue molecule sono parimente in equilibrio pel contrasto delle tre forze sopra nominate; ma le molecule inferiori non risentono l'attrazione, chè sarebbe esercitata da quelle, che empirebbero lo spazio *ghik* senza l'azione capillare. Quindi è che la pressione sopra un sottoposto strato orizzontale *mn* è maggiore nell'interno del tubo di quello che sarebbe, se lo spazio *ghik* fosse pieno; e perciò quello strato dovrà abbassarsi fino al punto, che la pressione interna uguagli la esterna *po* in qualunque suo elemento.

4° Insomma il liquido non potrà rimanersi in equilibrio, se non dopo essersi sollevato o depresso nel tubo capillare tanto, che il peso della colonnetta liquida, più alta internamente o esternamente, compensi o l'eccesso di azione attrattiva delle molecule sollevatesi intorno alla parete, o il difetto di quelle, che mancano per essersi raccolte in se medesime. Ma le azioni di queste due forze, come dimostra coll'analisi matematica il Laplace, sono in ragione inversa dei diametri dei tubi capillari. Dunque le altezze, a cui il liquido interno ed esterno si trova, debbono essere nel rapporto medesimo; com'è di fatto.

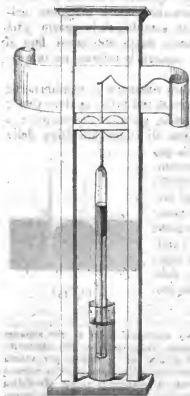
Fig. 141.

innalzata temperatura, questa salita è necessaria a far sì che rimanga tuffata una certa estensione della canna, in proporzione del diminuito peso specifico; e però la canna nè si alza nè si abbassa per variata temperatura. L'effetto poi delle dilatazioni sulla sostanza della canna è così insensibile, quanto è l'alterazione che subisce la spinta idrostatica dell'aria in ciascuna variazione barometrica. Questi pregi, benchè fossero soli (ciò che non è) basterebbero a collocare il barometrografo del professor Armellini sopra tutti gli inventati finora.

Più tardi lo stesso Professore al nostro Archiginnasio à ideato barometri di altre forme assai ingegnose: i quali strumenti anno ricevuto in Italia e fuori il meritato plauso. Fra questi ve n'à uno molto elegante (ma meno utile di quello descritto), il quale (fig.143.) à la canna (BO) fissa, e la vaschetta (KQPN) mobile: e questa ritrova il suo equilibrio stabile, perchè è attaccata per due anse (HK, MN) ad un vero, ma assai grande areometro (R) galleggiante nell'acqua di un vaso fisso (V).

5° Se non che, come fa avvertire Poisson, in questa teoria è trascurata quella rapida variazione di densità, che il liquido soffre nella sua superficie libera, vicino alla parete del tubo; senza cui i fenomeni capillari non avrebber luogo. Dal che il medesimo deduce che i fatti di capillarità sono dovuti all'azione moleculare modificata non solo dalle curvature delle superficie; ma si ancora dallo stato particolare dei liquidi alle loro estremità.

Fig. 132.

45. Conclusione. — Quale sorpresa ne reca il vedere per la prima volta un immenso vascello, popolato da gran numero di passeggieri, e buonevoglie; munito di grossi cannoni; carico di abbondante viatico, delle necessarie munizioni, di macchine, di equipaggi, di utili mercatanzie; ed equilibrato da pesante zavorra, solcare lieve lieve le acque dell'Oceano, e correre maestoso e securo su di un così instabile elemento! Quale riconoscenza suscita il ripensare alle utilità, agli agi, alle delizie, che provengono dalla navigazione, e debbonsi a coloro, i quali dier mano agli incrementi della Nautica! Quali sentimenti di pietà germogliano in cuore, quando si giunge a comprendere le dolci attrattive, onde il Sommo Ordinatore di tutto il creato à saputo stimolarci ad intraprese, dalle quali dovea derivarne ad un tempo occupazione, ricchezza, scienza, socialità, civilizzazione, moralità!

ARTICOLO II.

IDRODINAMICA.

46. Teorema di Torricelli.— Le leggi relative al movimento dei liquidi, (leggi che costituiscono l' *Idrodinamica*) si assommano tutte nel teorema, che fu ritrovato da Torricelli; e cui, premesse alcune definizioni, passiamo a dimostrare.

I. DEFINIZIONI. 1ª Quella parte dell'Idrodinamica, che tratta del corso delle acque, porta il nome speciale di *Idraulica*.

2ª La quantità di liquido, che sgorga da un orifizio durante un certo tempo, chiamasi *dispensa*, o *portata*.

3ª L'altezza del liquido, che insiste verticalmente sul centro di gravità dell'orificio, è detta *carico*, o *battente*.

4ª L'area dell'orifizio suol chiamarsi *luce*.

II. TEOREMA. *La velocità, con cui un liquido sgorga liberamente dall' orifizio di una sottil parete di un ampio vase, uguaglia quella, cui il liquido stesso acquisterebbe cadendo dal livello al centro di gravità dell'orifizio medesimo.*

Fig. 143.

Dimostrazione. Rende verosimile questo teorema anche il solo fatto dei zampilli verticali; i quali salgono più o meno, secondo che è più alto il livello del serbatoio. È vero che non giungono mai al livello medesimo; ma ciò evidentemente proviene dall'adesione, che soffre il liquido, dalla resistenza dell'aria, e dall'urto delle gocciole più alte, che ricadono in basso. Ma la dimostrazione vera si desume dalle teorie già stabilite. Facciamo la supposizione che nel fondo sottile di un re-

cipiente AB (fig.144.) sia praticato un foro FG, assai piccolo in confronto alla capacità del vase. Supponiamo inoltre che una piccola massa MNPQ, della colonna liquida DEFG premente sull'orifizio, cada separatamente pel proprio peso. Sarà applicabile a tal massa la teoria del moto uniformemente accelerato: e però la velocità sua v, quand'essa è giunta in PQ, verrà rappresentata, come sappiamo (30.II.2°), da $v=\sqrt{(2.gs)}$; ove g sarebbe la forza acceleratrice della gravità, ed s rappresenterebbe la sola MP. Onde $v=\sqrt{(2.g.\mathrm{MP})}$. Ma in fatto quella massa risente l'effetto di tutto il peso della colonna liquida soprastante; e però l'accelerazione, cui diremo g', e quindi la velocità dovrà per quella pressione riuscire più grande. Ond'è che tale velocità potrà esprimersi per $v=\sqrt{(2.g'.\mathrm{MP})}$; e potrà dirsi che $g:g'::p:p'$, intendendo per p e p' rispettivamente i pesi della massa MPQN, e della colonna liquida DPQE. Ora le pressioni stanno fra loro direttamente come le altezze delle colonne prementi, ossia $p:p'::\mathrm{MP}:\mathrm{DP}$. Dunque $g:g'::\mathrm{MP}:\mathrm{DP}$; donde $g'=g.\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{MP}}$. E per conseguenza, sostituendo questo valore nella formola della velocità, sarà $v=\sqrt{(2.g.\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{MP}}.\mathrm{MP})}$, e

$$v=\sqrt{(2.g.\mathrm{DP})}.$$

III. COROLLARII. 1° Dunque la velocità dell'efflusso è indipendente dalla specie e densità del liquido. Infatti esso varia soltanto coll'altezza di pressione. E sebbene questa debba divariare colla densità, conviene avvertire che colla densità cangia anche la massa spinta: e quindi, essendo le forze motrici proporzionali alle masse, la velocità rimane costante.

2° Dunque le velocità dell'efflusso stanno fra loro come le radici quadrate dei rispettivi carichi, o profondità degli orifizii. Giacchè chiamando p, p' tali profondità, le velocità saranno $v=\sqrt{(2.gp)}$, $v'=\sqrt{(2.gp')}$: e quindi $v:v'::\sqrt{p}:\sqrt{p'}$.

3° Dunque la portata assoluta, supposto invariabile il livello, equivale ad un prisma di liquido, di base uguale all'area dell'orifizio, e di altezza pari allo spazio, che sareb-

be percorso da un grave nel detto tempo e colla velocità dell'efflusso.

IV. SCOLII. 1° Se l'acqua fosse premuta anche artificialmente con uno stantuffo, bisognerebbe trovare di che quantità s'avrebbe ad accrescere la colonna del liquido, affinchè questo facesse da sè solo quest'altra pressione ancora. Ciò fatto dovrebbe dirsi che il liquore à nell'uscire la velocità, che avrebbe, se ivi fosse caduto non solo dal livello, ma da un'altezza tanto maggiore quanto è grande la detta quantità.

2° I getti d'acqua obliqui descrivono una parabola: dappoichè ogni molecula del liquido, che esce da un fianco del vaso, ritrovasi nella condizione di un proiettile lanciato obliquamente.

3° Sembrerebbe che dal teorema di Torricelli si potesse dedurre che in un tubo rivolto all'insù l'acqua, che cade in basso, dovesse acquistare la forza di risalire all'altezza del livello dell'acqua nella conserva; ma noi abbiamo testè accennato perchè ciò non possa essere [1]. Or bene: I. dalle sperienze di Mariotte si deduce che per uno zampillo di 5 piedi la conserva s'innalza di 5 piedi e 1 pollice; e che in generale all'altezza a del getto bisogna aggiungere tanti pollici, quante unità si ritrovano in $(\frac{a}{5})^2$. Per un getto, per esempio, di 15 piedi si richiede un'altezza di 15 piedi più pollici $(15:5)^2 = 3^2 = 9$. II. Quanto ai tubi di condotta, Prony à ottenuto la seguente formula $v = 36,79 . \sqrt{(\frac{d.a}{l})}$, ove d è il diametro, l la lunghezza del tubo, a l'altezza del livello

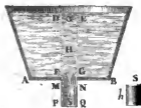



Fig. 144.

1 Come avviene nei *pozzi artesiani*, che sono in uso fin da un tempo immemorabile, e che sono così detti dalla provincia francese d'Artois, nella quale abbondano. Per costruire uno di questi pozzi bisogna fora-

dell' acqua sopra la bocca del tubo, per la quale esce l'acqua. Questa formula, ove l'unità sia il metro, vale purchè l sia almeno 100.d.

4° Dalle sperienze di Mariotte e di Desagaliers risulta che. I. nei tubi grossi la velocità è minore, e la resistenza dell'aria, e dell'attrito è meno sensibile; II. giova evitare i gomiti acuti nel tubo, affinchè non accadano urti violenti; III. il getto è più alto e più trasparente, quando l'orifizio è inciso in una parete sottile sovrapposta orizzontalmente alla bocca del tubo.

5° Per ottenere la costanza di livello, della quale si parla nel Corollario 3°, giova meglio di ogni altro l' apparecchio chiamato il *galleggiante di Prony*. Due casse (fig.146.) ret-

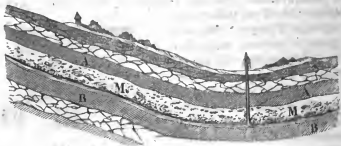



Fig. 145.

tangolari (C,C) galleggiano sull'acqua del serbatoio (AB), e sostengono per mezzo di certe aste di ferro (M,N,O) un bacino (DE), che rimane sotto il serbatoio, tiene il luogo della zavorra, e riceve l' acqua affluente dal serbatoio medesimo.

re il suolo verticalmente fino a quella profondità, in cui l'acqua (fig.145.) scorre in uno strato (MM) di sabbia o d' arena, che è permeabile, ed è racchiusa fra due strati (AA, BB) impermeabili, per esempio di argilla. Ma se il detto suolo non ritrovisi ad un livello molto più basso di qualche vicina montagna, l'acqua non vi salirà. Dacchè il liquido, anche quando è condotto dentro un doccione, non sale mai fino al livello del primo serbatoio: e poi siccome l'acqua, che zampilla dai pozzi artesiani, è la pluviale che scolò dai fianchi di una montagna, e poi s'intromise nelle cavità terrestri; però il livello della sorgente è quello dell'acqua racchiusa sotto terra, non il cacume della montagna.

È chiaro che il galleggiante scaccia un volume d'acqua, il cui peso uguaglia il peso suo, delle aste, e dell'acqua del bacino. Onde è che quanto è grande il volume d'acqua, il quale viene uscendo dal serbatoio, altrettanto grande è il volume d'acqua scacciata dal galleggiante; e però quant' acqua esce, tant'acqua sale; e così il livello rimane invariabile.

6° È anche bene sapere che la pressione, cui esercita un liquido contro le pareti di un tubo in cui corre, è minore che nello stato di riposo. Secondo Bernoulli essa, in un punto qualunque del tubo, è uguale alla carica su questo punto meno l'altezza dovuta alla velocità nel tubo. Può quindi accadere che, siccome in un tubo lungo al variare di declività, lunghezza, e struttura del tubo varia la velocità, questessa riesca o uguale o minore o maggiore di quella dovuta all'altezza di livello; e così la pressione risulti uguale, maggiore, o minore della pressione atmosferica. Nel primo caso questa pressione non vale a produrre uno zampillo per un piccolo foro praticato nel tubo; nel secondo lo produce; e nel terzo, invece dell'efflusso, vi è aspirazione dell'aria esterna.

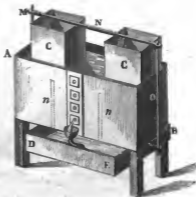



Fig. 146.

7° Che se chiudasi tutto ad un tratto l'esito al liquido, che sgorga da un lungo condotto, si produce un urto in virtù della velocità preconcepita, e dell'inerzia della lunga colonna liquida riempiente il detto condotto [1].

8° Ma anche il liquido, che sgorga da un orifizio scolpito al fondo del recipiente, non è *in fatto* dotato della velocità

1 Su questo principio è fondato il così detto *ariete idraulico* (fig.147.), il quale serve a sollevar l'acqua senza tromba. Un tubo o condotto (CD) è munito di una valvula (V) pesante specificamente il doppio dell'acqua

asserita nel teorema. Il che avviene e per la resistenza dell'aria, che tende ad elidere tale velocità; e per l'adesione delle molecule liquide alle pareti del recipiente, donde nasce una diminuzione di velocità almeno in alcune; e per i moti obliqui, che concepiscono le particelle nell' effluire da un foro inciso in una lastra sottile, ed i quali fanno prendere alla porzione del getto prossima all'orifizio la forma di un cono troncato.

e tenuto aperto dal peso suo. Per questo tubo l'acqua può essere condotta fino ad una campana (O) dotata di due valvule (P, Q), che s' aprono verso un recipiente (F), nel quale è racchiusa la campana stes-

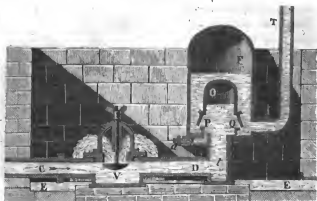



Fig. 147.

sa; e dal cui fondo esce un altro tubo (T), che è quello in cui si pretende sollevar l' acqua. Questo congegno si deve a Montgolfier; ed ecco come funziona. L'acqua, arrivata alla valvula (V) del condotto, principia ad uscire, ed a scorrere nel sottoposto canale (EE); quindi aumenta in velocità, spinge con forza la stessa valvula (V), e la chiude. Interrotto così questo esito, il liquido, per la velocità preconcepita, dà un urto, o *colpo d'ariete*, pel quale apronsi le animelle (P, Q) della campana, ed il liquido stesso si getta tanto nel tubo (T) d' ascensione, come nel recipiente, comprimendovi l'aria; e poi per l'elasticità di questessa dal recipiente passa nel tubo medesimo stabilendovisi ad un'altezza, che riuscirà proporzionale non al livello del serbatoio, ma alla ***quantità di moto*** della colonna d'acqua. Dopo ciò la velocità rimane distrutta, la valvula (V) nel condotto riapresi, l'acqua ritorna ad uscire, il moto s'accelera, l'animella medesima si richiude, un nuovo colpo d'ariete ricaccia dell'altro liquido nel tubo, e da capo riprincipia lo stesso giuoco.

47. Misura e distribuzione dell'acqua. — Principieremo dall'esporre qualche definizione, poi passeremo a stabilire le leggi relative alla dispensa dei liquidi, e completeremo il discorso con alcune avvertenze dirette a far notare la differenza che passa fra il fatto e la teoria, ed i modi di valutare la velocità dell'acqua corrente.

I. DEFINIZIONI. 1° L'assumere che fa la forma di cono troncato (**46**. IV. 7°.) la colonna liquida in prossimità dell'orifizio, donde ella sgorga, riceve il nome di *contrazione della vena*.

2° La sezione (fig. 148.) più angusta (PQ) della colonna liquida, costituente il getto, è chiamata *sezione contratta*.

3° Diconsi *tubi addizionali* o *fistole* i cannelli, che s'applicano all'orifizio per correggere gli effetti della contrazione della vena.

4° Col nome di *idrometro*, o *reometro* si vuol significare un congegno atto a misurare la velocità della corrente liquida.

Fig. 148.

II. LEGGI. 1° *La dispensa a carico costante è proporzionale all'area dell'orifizio.* Cioè chiamando d la dispensa, ed a la detta area, sarà $d : a = C$.

2° *Variando poi, a parità di tutto il resto, l'altezza di pressione, la dispensa è proporzionale alla velocità.* In formula $d : v = C$.

3° *Ove poi sieno variabili i carichi e le aperture, la dispensa sarà uguale al prodotto loro, cioè* $d = a.v$. Dacchè se in un tempo il più piccolo la velocità è 1, la dispensa sarà $= a$; sarà uguale a $2a$, se la velocità è 2; e così di seguito.

III. COROLLARIO. Dunque la dispensa è uguale all'area dell'orificio moltiplicata per la radice quadra del carico. Imperocchè $d = a.v$; e, le velocità (**46**. III. 2°.) stando fra loro come le radici quadrate dei rispettivi carichi, $d = a.\sqrt{p}$.

IV. SCOLII. 1° Se non che la differenza, che in grazia della contrazione della vena passa fra il fatto sperimentale e le deduzioni teoriche, è stata misurata; e ne è risultato che per essa la dispensa è circa $^5/_8$ di quella, che è data dalla for-

mula. Ond'è che, a volere che la teoria risponda ai fatti, o si deve assumere per orifizio non la luce, ma la sezione della vena contratta, o si deve modificare la formula, traducendola nella seguente $d=\frac{5}{8}.av$.

2° Ma l'effetto della contrazione della vena viene diminuito coll'aggiungere all'orifizio una fistola. Anzi se questa fistola sarà lunga 2 o 3 volte più del diametro della luce, la dispensa sarà rappresentata da $d=\frac{13}{16}.\ av$; se poi la medesima sarà cavata interiormente nella forma della vena contratta, la dispensa $d''=a.v$. Infatti si è provato con accurate sperienze che la portata di una luce, tagliata in una lastra sottile, sta a quella dell'orifizio munito di una fistola uguale alla prima delle sopraddette, sta a quella della seconda soprannominata fistola, come 10 : 13 : 16. Perciò $d : d' :: 10 : 13$.

Ma $d=\frac{5}{8}.\ av$. Dunque $\frac{5}{8}.\ av : d' :: 10 : 13$; per conseguenza

$$d'=\frac{5}{8}.av\times\frac{13}{10}=\frac{1}{8}.\frac{13}{2}.\ av=\frac{13}{16}.\ av.$$ Così $d : d'' :: 10 : 16$; proporzione che differisce dalla superiore pel solo 16 sostituito al 13. Onde in fine $d''=\frac{16}{16}.\ av=av$.

3° Inoltre, aggiungendo all'orifizio un tubo conico divergente, la portata può divenire maggiore della teorica. È ciò perchè la fistola accresce la sezione della vena in proporzione maggiore di quella, onde viene diminuita la velocità.

4° Sulle sopraddette leggi sono basati i metodi per la misura e distribuzione delle acque. L'unità di misura è convenzionale e varia pei diversi paesi. Essa à per elementi la luce, il battente, e la fistola [1].

1 Da noi, e precisamente per l'Acquavergine, la luce è circolare del diametro di un' oncia di passetto (metri 0,0186); il battente è un palmo e un quarto, ossia 15 oncie; la fistola è un tubo cilindrico orizzontale

5° Ove poi si tratti della portata d'un fiume, conviene prima determinare la sezione della corrente, e valutarne la velocità. A quest'ultimo scopo servono gl'istrumenti idrometrici. Il più semplice è un galleggiante; ma esso non misura che la velocità superficiale del fiume nel filone. È stato quindi proposto il così detto *tubo di Pitot*. Il quale tubo non è altro che un cannello di vetro aperto da ambidue le parti, e ripiegato in basso ad angolo retto. S'immerge nel fiume a varie profondità; ma in ognuna prima si rivolge la bocca inferiore incontro alla corrente o verso la sorgente, e poi alla parte opposta, cioè alla foce. Nella prima sperienza l'acqua sempre sale nel tubo più del livello del fiume, e nella seconda resta alquanto sotto il livello medesimo: dalla differenza dei due livelli interni s'arguisce la velocità del fiume alla profondità della bocca inferiore del tubo.

6° Migliore di ogni altro idrometro riesce il *reometro di Woltmann*. Consiste in due palette oblique saldate agli estremi di una breve asta girevole in un piano verticale, ed affidata ad un gran regolo, che s'immerge fino al fondo del fiume. Le palette sono spinte dall'acqua corrente a rotare, come girano due penne oblique infilate ad un asse perpendicolare; ed i giri loro per mezzo di un roteggio sono rappresentati dal moto di due indici, ad un di presso come nel *contatore* del gasse.

48. Chiusa. — Sia che si studiino le leggi del moto delle acque; sia che si osservi la varietà e la bellezza del loro corso; sia che si valutino i vantaggi, cui esse arrecano agli uomini ed agli animali; ovunque si scorgono i caratteri dell'unità di un sapientissimo Artefice, ed i segnali dell'amorevolezza di un provvidentissimo Padre.

minuto secondo è, secondo Scaccia, metri cubi 0,000468, secondo Prony 0,0004766, o in numeri tondi 40 metri cubi ogni 24 ore. Per l'Acquafelice, e per l'Acquapaola l'unità di misura è la metà; cioè diversifica la sola luce, la quale è in sezione metà della sopraddetta.

CAPO TERZO.

EQUILIBRIO E MOTO DEGLI AERIFORMI.

49. Più breve del Capo antecedente riuscirà questo, in cui trattasi l'argomento stesso relativamente ai vapori; sì perchè molto già se n'è detto nella Parte Sperimentale, sì perchè ciò che rimane a dire è, per la maggior parte, un'applicazione assai facile delle teorie stabilite nei due Capi antecedenti.

ARTICOLO I.

AEROSTATICA.

50. Legge della densità dei varii strati dell'atmosfera. — Uno dei più importanti effetti delle leggi, che regolano l'equilibrio degli aeriformi, è senza dubbio quell'ordinata varietà di condensazione degli strati orizzontali atmosferici, cui studiammo nella Sezione Prima della Parte Sperimentale (**54.**), e che ora possiamo matematicamente provare.

I. PROPOSIZIONE. *Ad altezze crescenti in progressione aritmetica, decresce la densità dell'aria in progressione geometrica.*

Dimostrazione. L'atmosfera può concepirsi divisa in tanti strati orizzontali, ciascuno della medesima spessezza, e di uniforme densità. Or bene: le densità dei successivi strati vengano rappresentate da $d_1, d_2, d_3, \ldots$; si prescinda da ogni diminuzione di gravità nelle maggiori altezze, e si chiamino $p_1, p_2, p_3, \ldots$ i pesi di questi strati diversamente densi, ed $e_1, e_2, e_3, \ldots$ le loro forze elastiche. Nella fatta ipotesi i pesi dei varii strati staranno fra loro, come le loro densità. Dunque confrontando il primo strato con uno qualunque (cui diremo *ennesimo*) dei superiori, starà $d_n : d_1 :: p_n : p_1$. Ma per la legge di Mariotte $d_n : d_1 :: e_n : e_1$. Dunque $e_n : e_1 :: p_n : p_1$. E però starà ancora $e_n + p_n : e_1 + p_1 :: e_n : e_1$. Se non che la forza elastica di uno strato d'aria si può valutare dalla pressione, che gravita su di esso; e tale pressione risulta da due elementi, cioè dalla forza elastica dello strato immediatamente superiore, e dal peso di questesso. E ciò perchè ogni strato preme col suo peso

il sottostante, e questo trasmette al successivo inferiore tale pressione, aggiungendovi il peso suo. Dunque $e_n + p_n = e_{n-1}$, ed $e_1 + p_1 = e$; intendendo per e la pressione, che si esercita sul livello del mare. Ciò posto, l'antecedente proporzione si converte in $e_{n-1} : e :: e_n : e_1$; donde ricavasi $e_n = \frac{e_1}{e} e_{n-1}$. Ora dicasi k la frazione $\frac{e}{e_1}$ (che è impropria, perchè $e_1 < e$), e sarà $e_n = \frac{1}{k} e_{n-1}$. Dando adesso ad n, che è certamente un intero positivo, tutti i successivi valori 1, 2, 3,...; si avrà $e_1 = \frac{1}{k} . e$; $e_2 = \frac{1}{k} e_1 = \frac{1}{k^2} . e$; $e_3 = \frac{1}{k} e_2 = \frac{1}{k^3} . e$, ed in generale $e_n = \frac{1}{k_n} . e$. Insomma $e_1 : e_2 : e_3 : .... :: \frac{1}{k} e : \frac{1}{k^2} . e : \frac{1}{k^3} e : .... :: \frac{1}{k} : \frac{1}{k^2} : \frac{1}{k^3} : ....$ Dunque crescendo le altezze nella progressione 1, 2, 3,..., decresce la densità nella progressione k, k^2, k^3,... Ma ciò è vero per ogni altra progressione, perchè una progressione non si altera col toglierle termini equidistanti. Dunque ecc.

II. COROLLARIO. Dunque la forza elastica di due strati atmosferici, l'altezza dei quali differisca in ragione aritmetica, è differente in ragione geometrica. Imperocchè è provato che la forza elastica degli aeriformi è geometricamente proporzionale alla densità.

51. Il principio d'Archimede applicato agli aeriformi. — Il principio d'Archimede (**43.**) essendo fondato sulla fluidità, deve avverarsi eziandio negli aeriformi. Ma ciò suole dimostrarsi anche direttamente.

I. PROPOSIZIONE. *Del peso di un corpo immerso in un aeriforme, questo sostiene quella parte, che equivale al peso suo.*

Dimostrazioni. 1ª Si metta sotto la campana pneumatica (fig.149.) una bilancia, dopo avere per essa posto in equilibrio una sfera concava di metallo, del volume poniamo di 10

litri, ed un piccolo contrappeso; e poi si estragga l' aria. Si vede la sfera precipitare in basso. Il che evidentemente avviene perchè una parte del suo peso non è più sostenuta dall'aria. Che se prima di racchiudere la detta bilancia sotto la campana si fossero aggiunti al contrappeso circa 0,55, cioè quasi il peso di un decalitro d' aria; col fare il vuoto si sarebbe stabilito l'equilibrio.

2ª Vige anche qui l'argomento razionale recato a proposito dei liquidi. Intanto un dato volume, per esempio una sfera, d'aria facente parte dell'atmosfera non cade, inquanto la sottostante ne sostiene tutto il peso. Dunque sostituendo a quella sfera d'aria una eguale sfera costituita da una sostanza qualunque, questa sarà pure sostenuta o in tutto o in parte, secondo che il suo peso uguaglierà, oppure supererà quello di un ugual volume d'aria.

Fig. 119.

II. DEFINIZIONE. La bilancia munita della sfera cava metallica, la quale serve a valutare il peso dell'aria, è chiamata *baroscopio*.

III. COROLLARII. 1° Dunque un corpo più pesante specificamente dell' aria deve cadere in essa, ma con velocità tanto minore, quanto il suo peso specifico diversifica più da quello dell'aria. E questa è una delle ragioni, per le quali i corpi di diverso peso specifico cadono nell'aria con disuguali velocità.

2° Dunque un corpo specificamente men pesante dell' aria deve in essa salire. Dacchè la spinta in su esercitata dall'aria supera il peso di quel corpo, e prevale. È questa la cagione, per cui salgono nell'aria la fiamma, il fumo, il vapore.

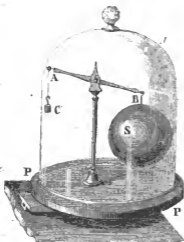
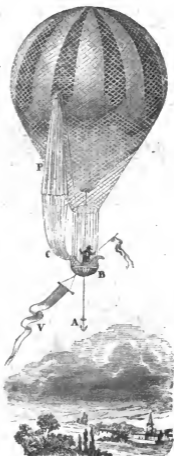
3° Dunque un corpo, il cui peso specifico sia uguale a quello di un dato strato dell'atmosfera, rimarrà in esso strato in

equilibrio. Così il vapor d' acqua, che si solleva dal mare, sale fino a che non giunga a quell' altezza, in cui l' aria è tanto leggiera quanto esso, e lì si ferma. E perciò le nubi si costituiscono ad una non molto grande distanza dalla Terra.

Fig. 150.

IV. SCOLII. 1° Se l'acido carbonico occupa la regione più bassa della così detta *Grotta del cane* presso Napoli, ciò avviene perchè un decalitro di tale acido pesa 5 grammi più dell' aria. Come pure il fumo delle torce a vento, che i *ciceroni* accendono in detta grotta, mostra dove quell'acido termini: perchè esso fumo, pesando più dell' aria e meno dell'acido, galleggia su questo.

2° L' ultimo corollario contiene la spiegazione dei così detti *palloni volanti*. Di questi altri sono ad aria rarefatta, e però alleggerita, per calore; e chiamansi *mongolfieri* dal cognome dei fabbricatori di carta ad Annonay, i quali ne furono esecutori il 5 Giugno 1783, cioè molto dopo del gesuita portoghese Guzmâo. Altri poi (fig. 150.) sono gonfiati con idrogeno, che pesa 14 volte meno dell' aria, e sono detti più propriamente *globi aerostatici* od *aeròstati*. Questi [1]

[1] Quando i globi aerostatici si vogliono abbastanza leggieri da poter salire fino a regioni elevate e però in aria molto rarefatta, ad onta del

furono proposti nel 1767 da Blach professore di Fisica a Edimburgo, ed eseguiti in piccolo nel 1783 da Cavallo; ma furono esperimentati la prima volta nel 1783 nel giardino delle *Tuileries* da Charles professore di Fisica a Parigi.

3° La ragione, per cui i corpi cadono con minore velocità nell' aria che nel vuoto, non è solamente quella esposta nel corollario 1°; dacchè in tal fatto influisce molto l'elasticità stessa dell'aria. Infatti sotto un corpo, che cade con grande velocità, s'addensa una certa quantità di questo gasse permanente; e poichè alla condensazione s'associa, come sappiamo, un propor-

Fig. 151.

peso dell'involucro di seta, delle corde, della barchetta, e degli aeronauti; conviene gonfiarli con idrogeno quasi puro. In questo caso tutta l'arte consiste nell'ottenere una quantità sufficiente di tale gasse decomponendo l'acqua collo zinco o ferro, e coll'acido solforico. Sarebbe più economico adoperare il gasse dell' illuminazione dove questo è in uso; ma l'idrogeno carbonato non è abbastanza leggiero.

È celebre, anche per le notizie che ne ebbe la scienza, il volo aerostatico di Gay-Lussac, che il 15 settembre 1804 saliva a più di 7 chilometri sul livello del mare, e si applicava alle sue ricerche scientifiche ad onta dell' eccessivo freddo, e che il polso gli battesse 120 volte a secondo. Più in alto ancora sono saliti da poi altri aeronauti: fra i quali Green à veduto il barometro discendere a 32 centimetri, ed il termometro a 9° sotto zero; ed il nostro Andreoli a Padova nel 1808 si è innalzato fino ad 8265 metri.

zionale sviluppo di forza elastica, però l'aria anche per questa spinge in su, o trattiene il corpo cadente. Su tal principio è fondato il *paracadute*, che si dice inventato da Blanchart, ed adoperato la prima volta da un certo Garnerin [1].

4° Tutti questi accorgimenti e molti altri ancora, rendono spedito e sicuro il volo degli uccelli. I quali rivestiti di penne assai leggiere e di piume, difendonsi dalla bassa temperatura delle alte regioni, e si appoggiano colle ali, quasi con due paracadute, sul più instabile degli elementi. Ma oltracciò il loro corpo à una qualche somiglianza ad un aerostata: dacchè i polmoni degli uccelli ànno delle aperture, onde l'aria, cui respirano, introducesi nelle cavità del ventre e li alleggerisce. Quantunque volte ci cade sott' occhio un nuovo artifizio della Provvidenza diretto a favorir noi o le creature destinate per noi, abbandoniamoci a tutti i sentimenti di pietà e di gratitudine, che in un cuor nobile dee necessariamente eccitare lo studio delle opere della creazione.

ARTICOLO II.

AERODINAMICA.

52. Velocità di efflusso degli aeriformi. — È manifesto che la velocità di efflusso degli aeriformi è data dalla legge stessa di Torricelli. Siccome per altro la pressione esercitata da' fluidi elastici dipende principalmente dalla densità, così in essi la formula della velocità riceve la modificazione, cui passiamo a dimostrare.

I. TEOREMA. *Là velocità, onde un aeriforme si getta nel vuoto, è uguale alla radice del prodotto, che nasce col mol-*

[1] Serve il paracadute (fig. 151.) a temperare la foga della caduta; e consiste in un grande ombrello, sotto cui l'aria tanto più si stipa, quanto più veloce discende esso, e con lui l'aeronauta, che è sostenuto dalle funi legate alla circonferenza del detto ombrello. Ma questo à nel vertice o nella parte più sublime, un' apertura (O) circolare; affinchè l'aria, condensandosi ed uscendo di colassù, renda in qualche maniera stabile il punto di sospensione, e sieno impedite le oscillazioni e fors' anche il rovesciamento, che potrebbero conseguitare dal suo fuggire pei lembi o per la circonferenza del paracadute medesimo.

tiplicare il doppio della gravità per una frazione, il cui denominatore sia la densità di esso fluido, ed il numeratore il peso della colonna barometrica.

Dimostrazione. Si chiami d la densità, che à il fluido elastico alla parete del vase, in cui è inciso l'orifizio; p la densità dell'idrargiro; b l'altezza contemporanea della colonna barometrica; ed a quella, che deve avere una colonna del detto fluido elastico di uniforme densità, per produrre col suo peso una pressione uguale a quella, cui esercita per la sua elasticità. Già sappiamo che le altezze, alle quali si stabiliscono due fluidi comunicanti fra loro, sono in ragione inversa delle loro densità. Dunque $a : b :: p : d$; e per conseguenza $a = \frac{bp}{d}$. Ma $v = \sqrt{(2.ga)}$. Dunque $v = \sqrt{(2g.\frac{bp}{d})}$.

II. COROLLARII. 1° Dunque l'aria si getta nel vuoto con una velocità di quasi 400 metri a secondo. Infatti tale è il valore che ottiensi per v, quando nelle due formule superiori si sostituiscano alle lettere i numeri concreti dati dal fatto. Volendo adoperare la penultima formula $v = \sqrt{(2.ga)}$, si rifletta che la densità dell'aria al livello del mare è 770 volte minore di quella dell'acqua; e perciò affinchè essa aria eserciti una pressione uguale a quella prodotta da una colonna d'acqua alta metri 10,3, o una colonna d'idrargiro di metri 0,76, è necessario che si sollevi 770 volte più di 10,3; costituisca cioè una colonna alta metri $10,3 \times 770 = 7931$. Ricordiamoci inoltre che $g = 9,8$. Sostituendo ora tali valori nella detta formula, sarà $v = \sqrt{(2 \times 9,8 \times 7931)} = 394,29$.

2° Le velocità di efflusso nei diversi aeriformi sono in ragione inversa delle radici quadrate delle loro densità. Infatti per applicare l'ultima formula superiore ad altri gassi, non vi è che da mutare il valore della lettera d.

III. SCOLII. 1° È chiaro che dalla tesi testè dimostrata debbono pullulare i corollarii medesimi, che vennero dedotti pei liquidi. Ma tutti quei corollarii sono stati dimostrati anche direttamente dalle sperienze di Schmidt.

2° Se l'aeriforme non effluisce nel vuoto, si deve sottrarre dalla pressione interna la esterna, per determinare la ve-

locità. E questo è il caso comune; perchè il secondo buffo di fluido si getta in uno spazio, ove è entrato il primo e dove ritrovasi un' opposizione alla velocità.

3° Lagerhielm ed Aubuisson ànno trovato con accurati sperimenti che la quantità di fluido, che effluisce *di fatto* in un dato tempo è minore di quella, che è determinata *in teoria* dalla formola: e che applicando all' orifizio, inciso in una parete sottile, dei tubi di forma cilindrica o conica non maggiori in lunghezza di 7 od 8 volte il loro diametro, la detta differenza viene diminuendo. Dalle quali cose si è dedotto che anche gli aeriformi soffrono la contrazione della vena, e che la sezione contratta è circa $^2/_3$ o 0,62 di quella dell' orificio.

53. Conducimento dei gassi pei tubi. — Riguardo al conducimento degli aeriformi per mezzo di lunghi tubi, le sperienze di Girard e Cagniard-Latour ànno dimostrato le tre leggi, che passiamo ad annunciare.

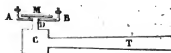



Fig. 152.

I. LEGGI. 1° *Il gasse idrogeno carburato, e l'aria atmosferica sotto ugual pressione, ed a parità di tutto il resto, si muovono colle medesime leggi; e soffrono la resistenza stessa malgrado la loro differente densità.*

2° *La resistenza, che soffrono quei due gassi, è esattamente proporzionale al quadrato della loro velocità media.*

3° *Le quantità dispensate dei detti fluidi per mezzo di tubi di grandezza uniforme sono in ragione diretta della pressione indicata dal manometro nel serbatoio, ed in ragione inversa della radice quadrata della lunghezza del tubo, cui percorrono.*

II. SCOLII. 1° È curioso il fenomeno chiamato del *disco oscillante*. Supponiamo I. (fig. 152.) che un cannello (TC) un po' conico, lungo 22 centimetri, e largo in diametro millimetri 5, sia saldato ad un piccolo recipiente (C); II. che su questo sollevisi verticalmente un tubetto (D) del diametro di 2 o 3 millimetri; III. che questo tubetto metta capo

ad un disco orizzontale (AB); IV. e che finalmente sul disco (AB) riposi un altro disco (M) di cartone o di legno quasi di ugual grandezza. Soffiando nel tubo (TC), oppure mettendone in comunicazione l'estremità (T) con un serbatoio qualunque di gasse, il disco superiore (M) si solleva, e nasce un efflusso fra i due dischi. Ma subito dopo il disco medesimo (M) concepisce un movimento d'oscillazione; e se tentasi di staccarlo si esperimenta una così sensibile resistenza, che esso pare aderente al piano sottoposto. Si spiega coll'avvertire che l'aria compressa, passando dal tubo angusto all'intervallo frapposto ai due dischi, si dilata, mantiene la velocità di efflusso, e per conseguenza non riempie quell'intervallo con una densità uguale a quella dell'atmosfera. Per la prevalenza quindi della pressione esterna sull'interna, il dischetto superiore è spinto sull'inferiore, e vi aderisce.

2° Dal fenomeno del disco oscillante si raccoglie quanto sarebbe dannoso dare alle valvule di sicurezza un'estensione molto maggiore di quella delle aperture, contro le quali esse valvule debbono essere applicate.

3° A spingere fuori con una pressione costante, e distribuire i gassi servono i *gassometri*. Intorno ai quali ci contenteremo di quanto ne abbiamo detto nella Sezione Prima della Parte Sperimentale (**62**.IV.5°; e pag 294).

4° Quest'ultima avvertenza ci suggerisce come le leggi or ora stabilite ànno esse pure la loro grande utilità, comechè non tanto apparente. E chi potrebbe dubitarne? Tutto in Natura è fatto con peso, numero, e misura; e tutto à la sua provvida destinazione. Le graziose forme delle piante, l'olezzo de' fiori, la soavità de' frutti, l'amenità delle colline, la fertilità delle praterie, i servigii che ci prestano gli animali, il nudrimento che riceviamo dalle mandre, le ricchezze che estragghiamo dalle miniere, i pesci che ci esibiscono i mari, la saggia ripartizione della luce e del calore cui dobbiamo alle stelle ed ai pianeti, i vantaggi che riceviamo dai muschi, dalle conchiglie, dai filugelli; ogni cosa ci persuade che nulla vi à nel creato, che non contribuisca alla perfezione del tutto.

SEZIONE SECONDA.

ACUSTICA ED OTTICA.

PROEMIO.

55. Oggetto della presente Sezione. — Nei Prolegomeni premessi a questi Elementi annunciammo che la parte della Fisica, nella quale studiansi i fenomeni del suono, à ricevuto il nome di *Acustica*; e che *Ottica* si denomina quella, in cui si applica l'Algebra ai fenomeni della luce. Noi veramente essendoci proposti di ridurre ai minimi termini le formule algoritmiche, avremmo potuto occuparci dell' Acustica anche nella Parte sperimentale; ciò non ostante ne abbiamo rimandato la trattazione in questa Parte matematica più per non discostarci dall'uso comune, e per una certa didascalica economia, che per bisogno di ricorrere ai calcoli algebrici. Vi abbiamo poi unito l'Ottica: perchè, dovendo questa essere la più elementare, si aggirerà principalmente sull'ipotesi delle ondulazioni eteree; l'intelligenza della quale rimane grandemente agevolata dalla cognizione delle onde sonore, che riescono e più facili a concepirsi, e più sicure ad ammettersi. È quindi manifesto che questi due temi dovranno fornire l'argomento a due distinti Capi.

CAPO PRIMO.

ACUSTICA.

56. Distribuzione delle materie. — Lo studio de'suoni nella sua parte filosofica abbraccia due ricerche principalissime; cioè come i suoni producansi dai corpi sonori, e come essi medesimi si propaghino e modifichino l' orecchio. Ognuna di queste sarà tema di un diverso Articolo.

ARTICOLO I.

PRODUZIONE DE' SUONI.

57. Nozioni preliminari. — Principieremo dallo stabilire i fatti fondamentali.

I. SCOLII 1° È noto ad ognuno che noi udiamo, ossia percepiamo delle sensazioni chiamate strepiti, rumori, suoni; e che tali sensazioni sono ricevute dall'animo per mezzo dell'orecchio.

2° Nessuno parimente ignora, che noi non potremmo ascoltar nulla, se verun ponderabile elastico fosse percosso, o strisciato, o pizzicato.

3° Ma tutti non sanno che è condizione indispensabile per l'udienza l' interposizione di un ponderabile parimente elastico fra il corpo percosso, e l'orecchio. E infatti un campanello posato su del bombage sotto la campana pneumatica (fig. 153.) non si sente più suonare, quando si è prodotto il vuoto, ad onta che veggasi percosso da un martelletto. Basta per altro che il detto campanello sia, per mezzo di corpi elastici, in comunicazione coll'aria esterna, perchè si oda. D'altra parte i palombari ascoltano il campanello, che suona sui battelli sostenenti la campana, nella quale essi trovansi rinchiusi: il battito di un orologio messo ad un capo di una trave si ascolta all' altro capo: due individui, collocati alle estremità di una lunga colonna di marmo possono conversare sotto voce fra loro.

4° Si conosce comunemente che talvolta il suono è più forte, e può udirsi a maggior distanza, e talvolta è più debole. Come pure passa un gran divario fra i suoni prodotti da un flauto o da un violino, e quelli di un trombone o di un contrabbasso, ad onta che siano egualmente forti. Finalmente altri riescono ingrati, ed altri sono piacevoli; e fra questessi distinguonsi diverse qualità, che conferiscono ai suoni de'caratteri di bellezza assai variati. Per esempio, il suono dell'oboé à un'indole del tutto diversa da quella del fagotto. La voce umana non può essere imitata da veruno strumento.

5° I suoni nel linguaggio comune ricevono nomi diversi secondo il diverso loro carattere, dicendosi, a cagion d'esempio: *fragore* del cannone, *scoppio* delle bombe, *tintinnio* del campanello, *strepito* della percossa, *mormorio* dei venti, *squillo* della tromba, *sibilo* del vento, *cigolio* delle ruote, *ronzio* delle api. Ma in Fisica si adopera un nome solo, ed è quello di suono.

II. DEFINIZIONI. 1ª È detta *suono* la sensazione ricevuta per le orecchie.

2ª Sono chiamati *suoni musicali*, o *suoni* senza più, ma in senso più ristretto quelli, che presentano un carattere deciso e facilmente imitabile colla voce.

3ª È detto *sonoro* il corpo, che per un urto può essere determinato a quell'azione, donde proviene il suono.

4ª Il corpo sonoro vien chiamato *sorgente di suono* nell'atto, che opera per produrre i suoni.

5ª *Veicolo del suono* o *buon conduttore del suono* o *diafonico* dicesi quel corpo intermedio, che per l'impulso del corpo sonoro modifica immediatamente l'orecchio.

Fig. 153.

6ª I corpi molli, che sono inetti a trasportare i suoni, ricevono l'appellazione di *adiafonici*.

7ª La parola *suono* indica pure l'azione, per la quale il corpo sonoro modifica il veicolo.

8ª L'azione stessa del veicolo porta il nome di *suono*.

9ª Il diverso grado nella forza dei suoni è nominato *intensità*; e così i suoni forti diconsi *più intensi*, e *meno intensi* i deboli e fiochi.

10ª La diversità, che passa fra i suoni di un soprano, e

quelli di un basso per esempio, viene espressa colle parole *altezza* e *bassezza*, *acutezza* e *profondità*. E però si parla di suoni *alti* od *acuti*, e di *bassi* o *profondi*.

11ª Un suono dicesi *unisono* ad un altro egualmente alto.

12ª La diversa indole o fisonomia di suoni unisoni ed egualmente intensi, ma più o men dolci od aspri, da alcuni è chiamata *tempra*, da altri *metallo*, e per francesismo *timbro* del suono.

13ª Una grata successione di suoni costituisce la così detta *melodia*, o *cantilena*, o *motivo musicale*.

Fig. 154.

14ª Un insieme di più suoni contemporanei, se è gradito all'orecchio, à nome *armonia*; se produce un disgusto passeggero destinato a rendere più piacevoli le seguenti armonie, è detto *dissonanza*; chiamasi *disaccordo* e *stuonazione* se riesce ingrato. Anche un solo suono è detto *stuonato*, quando sia di altezza incostante, od esca dalle leggi musicali.

14ª L'arte di combinare delle armonie gradite, e disporle in bell'ordine è denominata *Contrappunto*. *Musica* è l'arte di esegnire le armonie e le melodie.

15ª *Acustica* è la scienza, che determina come i suoni si producano e si trasmettano all'orecchio.

58. Cagione remota de'suoni. — Prima d'ogni altra cosa fa d'uopo ricercare per quale azione i corpi sonori producano i suoni.

I. SCOLII. 1° Per le sperienze di Acustica giova un piccolo strumento, che fu da prima usato per regolare la intonazione dei canti nel coro, ed ebbe nome *corista*, ed anche grecamente (διαπασῶν) *diapasōn*. È costituito (fig. 154.) da una verga d'acciaio ripiegata a guisa di molle da rattizzare il fuoco; e serve a dare un suono musicale invariabile, quando vi

sia strisciato sopra un arco di violino, o vi si faccia passare stentatamente in mezzo un cilindro di ferro.

2° Un'altra macchina, che serve nello studio dell'Acustica è la così detta *rota dentata di Savart*. È formata (fig.155.) da due ruote (A, e B) sostenute da un bancone (EM) ben fermo di legno. Una delle quali (A) è più grande, scanalata, munita di manubrio (M), e serve a far girare rapidamente l'altra (B), per mezzo di una cinghia (D), che s'avvolge sulla detta scanalatura, e sul rocchetto della piccola. L'altra (B), cioè la piccola, è munita di denti equidistanti destinati a far vibrare una carta (E) fissata sul bancone stesso; e di più

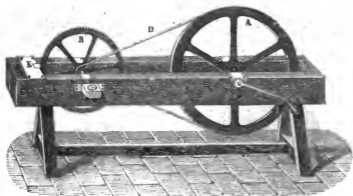



Fig. 155.

col suo asse fa sì che l'indice di un *contatore* (H) scorra un grado del sottoposto quadrante, ogni volta che essa medesima à compiuto una rotazione.

3° Giova alle ricerche medesime quell'istrumento, cui chiamano *sirena* (fig.156.). È tutto di ottone, e componesi di una scatola, di un disco astato, e di un contatore. Il coperchio cilindrico (A) della scatola (O) è trapassato da una serie di fori obliqui, equidistanti fra loro e dal centro del medesimo coperchio. In un piccolo incavo inciso in questesso centro poggia l'estremità inferiore puntuta dell'asta (T) saldata al disco; che è posato (fig.157.) sul detto coperchio, ed è trapassato parimenti da fori corrispondenti in tutto ai sot-

toposti, ma obliqui (*m*) in senso inverso. L'asta medesima (T) colla sua estremità superiore mette in moto (come il contatore del gasse) due indici (fig. 158.), che servono a segnare i giri del disco. Siccome il fondo della scatola è munito di un cannello, così questo s'introduce forzatamente in qualcuno dei fori (fig. 159.) di una cassa (BC), detta *somiere*, comunicante con un mantice (D). Ciò fatto basta premere con un'asta (A) sul mantice, perchè l'aria compressa, gettandosi nella scatola, ed uscendo pei fori obliqui del coperchio, urti contro le pareti dei corrispon-

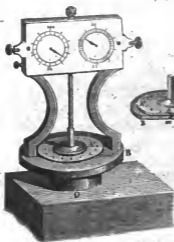



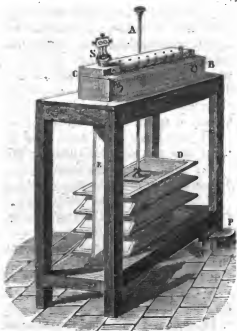
Fig. 156. Fig. 157. Fig. 158.

denti fori del disco, e determini questo a fare un passo girando. Con ciò i fori sottoposti si chiudono, ma poco stante i fori del disco tornano a combaciare con quelli del coperchio, l'aria esce di nuovo da tutti i fori e fa fare al disco un altro passo, e così di seguito. È manifesto che quanto più si preme sul serbatoio del mantice, tanto è maggiore la velocità, onde l'aria esce per la sirena; e quindi tanto maggiore è ancora la velocità, colla quale il disco gira nel suo piano; e per conseguenza l' aria più frequentemente affluirà dai fori del medesimo.

4º Un certo Duhamel à proposto di sostituire alla sirena, ed alla rota dentata un *cilindro* di legno coperto di nero di fumo, il quale per mezzo di un manubrio concepisce due movimenti, uno rotatorio intorno al proprio asse, ed uno traslatorio di ascensione; di modo che, quando il cilindro compie questi due movimenti, una punta metallica fissa possa tracciare sul nero di fumo un'elica tutta continua.

II. PROPOSIZIONI. 1ª *I corpi sonori allora suonano, quando le loro particelle fremono o vibrano.*

Fig. 159.

Dimostrazione. I. I corpi elastici sono tutti sonori; ed i molli sono inetti al suono per ciò solo che sono anelastici. II. Gli elastici stessi non si determinano al suono, che promuovendo nelle loro particelle delle vibrazioni. Infatti a tale scopo le corde di pianoforte e le campane debbono essere percosse; sulle corde di violino conviene produrre un attrito con un arco; quelle di un' arpa ànno ad essere pizzicate; la rota di Savart deve coll'urto dei suoi denti produrre frequentissime vibrazioni in una carta da giuoco; l'aria à da uscire a tratti brevissimi vuoi dalla sirena, che gira velocissimamente, vuoi da un sottil meato munito di un labbro acuto, oppure di una linguetta oscillante, contro cui essa comprimesi e frangesi. III. Per far cessare il suono basta sospendere le vibrazioni

vuoi colla pressione di uno *smorzatore*, vuoi col contatto di un corpo molle. IV. Finalmente le vibrazioni si veggono nelle corde di un gravicembalo; rimangono impresse sul cilindro girante di Duhamel; e, coll'applicare un dito su di una campana colpita dal martello, o sopra un corista percosso comunque, sono sensibili al tatto.

2ª *L'altezza dei suoni cresce colla frequenza delle vibrazioni.*

Dimostrazione. I. Coll'aumentare successivamente la velocità della rota di Savart, si ottiene che la carta produca suoni sempre meno profondi. II. Spingendo di più sul mantice della sirena, il disco gira con rapidità maggiore, e ne nascono suoni più acuti. III. Quando la lamina del cilindro girante di Duhamel si fa vibrare, e si determina a suonare, le linee elicoidali sono ondulate; ma le onde sono tanto più strette, quanto il suono della lamina è più alto.

III. DEFINIZIONI. 1ª È detta *scala musicale* una serie di sette suoni uno più alto dell'altro ad intervalli disuguali.

2ª I gradi della scala musicale si dicono *prima* o *suono fondamentale*, *seconda*, *terza*, *quarta*, *quinta*, *sesta*, e *settima*.

3ª Quando la prima della scala abbia una certa altezza convenzionale, i nomi dei gradi della scala sono *do* (oppure *ut*), *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*.

4ª Il suono che viene appresso al *si* dicesi *ottava*, ed anche *do* perchè imita, sebbene più acutamente, la prima. Così l'altro suono à nome *seconda* o *nona* o *re*; e via dicendo.

5ª Chiamasi *intervallo* la differenza di altezza, che passa fra due suoni.

IV. SCOLII. 1° Il suono è prodotto da quelle vibrazioni, che sono tanto rapide, quanto è necessario, affinchè eccitino una sensazione *continua*. Ma anche la troppo grande rapidità impedisce la percettibilità de' suoni. Nei casi ordinarii i limiti de'suoni percettibili sono il 32, ed il 18000; vale a dire che un numero di vibrazioni minore di 32, o maggiore di 18000 a secondo non produce suoni sensibili. Ma ciò dipende anche dalla intensità: dacchè Savart à provato che possono esser percettibili dei suoni prodotti da sole 14 o 16 vibrazioni a secondo, e perfino quelli che sono eccitati da ben 48000.

2° Colla sirena e colla rota dentata si è trovato, che il *do* basso del violoncello è prodotto da **128** vibrazioni, il *re* da **144**, il *mi* da **160**, il *fa* da **170**, il *sol* da **192**, il *la* da **214**, il *si* da **240**, ed il *do* ottava da **256**. Identico è il numero delle vibrazioni producenti i suoni medesimi in qualsivoglia altro istrumento. Chiamando **1** le vibrazioni del *do* basso, i sopraddetti numeri stanno fra loro come la serie **1**, $^9/_8$, $^5/_4$, $^4/_3$, $^3/_2$, $^5/_3$, $^{15}/_8$, **2**.

3° Come il *do* ottava è dato dal doppio numero di vibrazioni; così tutti i suoni della seconda scala un'ottava più acuta sono prodotti dagli stessi numeri di vibrazioni moltiplicati per **2**; quelli della terza dagli stessi numeri col fattore **4**, ecc. Le scale più basse poi risultano dal prodotto delle vibrazioni stesse per $^1/_2$, per $^1/_4$, e via discorrendo.

4° Attendendo ai numeri sopra esposti si vede facilmente che l'intervallo fra il *do* ed il *re* è $^9/_8$, fra *re* e *mi* è $^{10}/_9$, tra *mi* e *fa* è $^{16}/_{15}$, tra *fa* e *sol* è $^9/_8$, dal *sol* al *la* $^{10}/_9$, dal *la* al *si* $^9/_8$, da *si* a *do* $^{16}/_{15}$. Onde il rapporto fra un suono qualunque della scala, e quello, che immediatamente lo precede, non può essere espresso che da una di queste tre frazioni $^9/_8$, $^{10}/_9$, $^{16}/_{15}$.

***59. Intervalli, modi o tuoni, e temperamento.**— I. DEFINIZIONI. 1° Il primo dei tre intervalli $^9/_8$, $^{10}/_9$, $^{16}/_{15}$ dicesi *tuono maggiore*; il secondo *tuono minore*, *semituono maggiore* il terzo.

2° L'intervallo espresso da $^{25}/_{24}$ è chiamato *semituono minore*.

3° Quell' intervallo così piccolo, che non può essere distinto che da un orecchio molto esercitato, suol dirsi *comma*. Per questo intervallo s' intende comunemente il rapporto fra il tuono $^{10}/_9$, ed il $^9/_8$, che è $^{80}/_{81}$.

4° È stato denominato *intervallo-unità* il rapporto fra due suoni consecutivi uguale a $\sqrt[12]{2} = 1{,}059463$.

5° Il rapporto $^5/_4$ è detto *terza maggiore*; e *terza minore* quello di $^6/_5$.

6° Se un suono della scala venga innalzato di un semituono minore, moltiplicandone il numero delle vibrazioni per $^{25}/_{24}$, riceve l'appellazione di *diesis*.

7° È invece denominato *bemolle* se venga abbassato di un semituono, moltiplicandone il numero delle vibrazioni per $^{24}/_{25}$.

8° Si chiamano *armonici* i suoni prodotti da numeri di vibrazioni, che stanno fra loro come la serie dei numeri semplici 1, 2, 3, 4, 5,...

9° Un'armonia o una melodia si dice essere in *tuono* o in *modo*, per esempio, di *fa* o di *sol*, se i suoni che la compongono appartengono ad una scala, la cui prima sia il *fa* o il *sol*.

10° Una serie di 12 suoni, che differiscono uno dall'altro di un semituono, dicesi parimente *scala*: ma per distinguerla dalla sopra definita, è detta *cromatica*, e *diatonica* vien chiamata l'altra di sette suoni.

11° I modi, la cui terza è maggiore, sono detti *maggiori*; e *minori* quelli, che hanno minore la terza.

12° I metodi, per determinare la scala cromatica in maniera, che i suoi suoni possano far parte di qualunque modo, chiamansi *temperamenti*.

13° È denominato *temperamento uguale* quello, per cui a tutti i semituoni della scala cromatica viene assegnata una uguale distanza, misurata dall'intervallo–unità.

II. SCOLII. 1° Fra i suoni prodotti da numeri di vibrazioni intercetti fra 1 e 2, i più semplici sono $1 + {}^1/_2$, cioè $^3/_2$ o quello di quinta, $1 + {}^1/_3$, cioè $^4/_3$ o la quarta, $1 + {}^1/_4$, ossia $^5/_4$ o la terza maggiore, $1 + {}^1/_5$ ossia $^6/_5$ o la terza minore. Ora tali suoni accordano assai bene col fondamentale: dacchè il più perfetto accordo è quello di prima ed ottava, cioè di due suoni, uno dei quali è prodotto da un numero di vibrazioni doppio dell'altro; assai semplice è l'accordo fra la prima e la quinta, cioè fra due suoni tali che ad ogni 2 vibrazioni del primo ne sono concepite 3 dal secondo; l'altro accordo abbastanza grato è fra la prima e la quarta, compiendo questa 4 vibrazioni quando quella ne eseguisce 3; e piacevoli parimenti sono gli altri due di prima e terza, vuoi maggiore, vuoi minore. Il che significa che meglio accordano fra loro quei due suoni, i quali vengono prodotti da numeri di vibrazioni aventi fra loro i rapporti più semplici.

2° Ricercando parimenti i più semplici rapporti fra i nu-

meri delle vibrazioni di tre suoni, si vede facilmente che essi ritrovansi fra i tre suoni 1, $^5/_4$, $^3/_2$, ossia 4, 5, 6; che sono la prima, la terza maggiore, e la quinta. E qui pure si verifica la legge medesima: perchè questi tre suoni producono un accordo perfetto; che suol completarsi coll' unirvi l'ottava. Sono anche semplici a bastanza i rapporti fra i suoni 1, $^6/_5$, $^3/_2$, 2, ossia 10, 12, 15, 20, che è quanto dire prima, terza minore, quinta, e ottava. Questo ancora è un accordo gradito.

3° Volendo fare che un pezzo di musica sia eseguito ad un'altezza diversa da quella, in cui trovansi i suoni della scala, che ànno ricevuto i nomi monosillabi *do, re,...*, bisogna considerare come suono fondamentale un suono diverso dal *do.* Ma allora affinchè i suoni succedansi nell'ordine dovuto, è necessario modificare alcuni intervalli, cioè o sollevare al diesis qualche suono, o abbassarlo al bemolle.

4° Un suono diesato non è uguale al seguente bemollizzato. Così il *re diesis*, cioè $^9/_8 \cdot {}^{25}/_{24} = {}^{75}/_{64}$, ed il *mi bemolle*, ossia $^5/_4 \cdot {}^{24}/_{25} = {}^6/_5$, ànno fra loro il rapporto $^{128}/_{125}$, che è differente dall'unità. Ora gli strumenti a suono continuo, come i violini, possono esprimere tanto i diesis che i bemolli: ma in quelli a suoni fissi come il gravicembalo, quando non si vogliano interporre due suoni o due tasti nell'intervallo di un tuono, il suono stesso dovrà esprimerli ambidue. Converrà dunque che quest'unico non corrisponda esattamente nè all'uno nè all' altro, dovrà cioè essere temperato. A quest' uopo si suole ricorrere al temperamento uguale.

60. Vibrazioni delle corde. — Passiamo ora a studiare le leggi delle vibrazioni dei varii strumenti musicali.

I. SCOLII. 1° Gli strumenti musicali, possono ridursi a quattro generi; mentre altri sono *a corde*, come il violino ed il pianoforte; altri a *verghe* o *lamine*, come gli organetti tedeschi; altri a *piastre* o *membrane*, come i timpani e le campane; ed altri a *fiato*, come le trombe e l'organo.

2° Vi è un apparecchio detto *sonometro*, e (se sia dotato di una corda sola) *monocordo;* il quale serve ad esaminare le vibrazioni trasversali delle corde. Si compone (fig. 160.) di una cassa di legno, e di tre ponticelli. Due di questi (A e D) sono fissi, e sostengono una corda fissata per un capo,

e per l'altro tesa da un peso (P) variabile a piacere; l'altro ponticello (B) può spostarsi per far variare la lunghezza della corda, che si vuol far vibrare.

3° Un corpo, che suona, ordinariamente si divide da sè in un certo numero di parti aliquote; ognuna delle quali vibra separatamente. Mettendo (fig. 161.) il ponticello mobile (B) del sonometro ad una distanza (DB) dal punto fisso (D), che sia uguale ad un terzo di tutta la lunghezza della corda, e facendo vibrare quel terzo per mezzo di un arco, gli altri due terzi si dividono in due parti (AC, CB) vibranti separatamente: giacchè il punto (C) interposto fra esse rimane fermo, ed i loro punti medii fanno l'escursione massima. Come può vedersi col porre a cavalcioni alla corda dei pezzetti di carta. Accade l'ana-

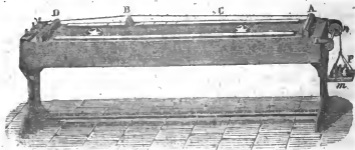



Fig. 160.

logo se (fig. 162.) il ponticello (B) mobile si pone ad un quarto, e via discorrendo. Ond'è che talvolta una corda sola acconciamente scossa dà insieme varii suoni, i quali stanno fra loro nei rapporti più semplici 1, 2, 3, 4, 5. Si tocchi difatti una corda lievemente col dito in un punto, che la divida in parti aliquote, e si strisci coll'arco l'uno o l'altro dei due tratti, non però in quei punti, che rimangono fra due delle medesime divisioni, nascerà quel suono, che avrebbesi ove una divisione della corda vibrasse da sè. Il che indica che la parte maggiore della corda si divide in parti uguali alla minore, e vibranti parzialmente. Anzi una corda, che sia abbastanza lunga, può dare ad un tempo il suono fondamentale, l'ottava, la quinta acuta, la seconda ottava, e la

terza che viene dopo, cioè i suoni così detti *armonici*. Conviene dunque dire che la corda da sè stessa si divide e suddivide in parti aliquote, che aggiungono le loro parziali vibrazioni a quelle della corda intera, e delle parti maggiori. E questa è condizione indispensabile per la produzione de' suoni: dacchè se una corda viene strisciata precisamente nel mezzo, e perciò è impedita la produzione dell' ottava acuta, essa non dà suono veruno. Come parimenti non si ottiene alcun suono, quando la corda viene strisciata nel medesimo tempo da entrambe le parti in un medesimo verso; ma ove muovansi i due archi in sensi contrarii, se ne à subito

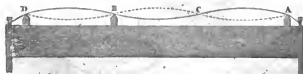



Fig. 161.

Fig. 162.

un suono sensibile. Tutto ciò serve a spiegare come e perchè, ove più corde vengano tese all'unisono le une presso le altre, e sieno esposte ad una corrente d'aria, di notte tranquilla si odono i più armoniosi accordi: nel che consiste il fenomeno della così detta *Arpa di Eolo*.

II. DEFINIZIONI. 1ª I punti e le linee, che nel corpo vibrante restano sensibilmente immobili, diconsi *nodi*, e *linee nodali*.

2ª Le parti vibranti, comprese fra due nodi o due linee nodali, sono chiamate *concamerazioni*.

3ª Il mezzo di una concamerazione appellasi *ventre*.

III. LEGGI. 1ª *Le lunghezze, che deve assumere una corda per produrre i suoni della scala, stanno fra loro come* 1, $^8/_9$, $^4/_5$, $^3/_4$, $^2/_3$, $^3/_5$, $^8/_{15}$, $^1/_2$. Si prova mettendo all' unisono la corda del sonometro colla rota dentata o colla sirena, quando si fanno a questi strumenti produrre i suoni della scala.

2° *I numeri delle vibrazioni nelle corde, a parità di tutto il resto, stanno fra loro in ragione inversa delle lunghezze loro.* Si vede a colpo d'occhio confrontando i numeri della legge ora esposta con quelli del 2° scolio del paragrafo precedente. Ma ciò si prova anche direttamente, facendo sonare una corda così lunga e poco tesa da poterne contare le vibrazioni.

3° *Il numero delle vibrazioni di una corda è in ragione diretta della radice quadra della tensione sua.* Si dimostra tendendo la corda del sonometro con diversi pesi, e facendola suonare all'unisono colla sirena e colla ruota dentata.

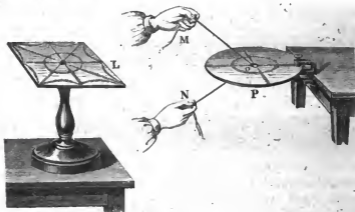



Fig. 163. Fig. 164.

4° *Il numero delle vibrazioni è in ragione inversa del raggio della corda.* Sostituendo una all'altra corde uguali in tutto il resto, ma di diametro disuguale, e facendole suonare come sopra, si prova la legge.

5° *Il numero delle vibrazioni di una corda è inversamente proporzionale alla radice quadra della sua densità.* Si dimostra col metodo stesso, ma adoperando corde di nota densità o peso specifico, ed uguali in tutto il resto.

IV. ALTRI SCOLII. 1° Ecco il perchè in un pianforte si ottengono tante ottave. Le corde pei suoni bassi sono di ottone, grosse, e lunghe; quelle pei suoni acuti sono più tese,

più fine, è di ferro. Nei violini le corde sono quattro sole, accordate colla diversa tensione in *sol*, *re*, *la*, *mi*; ma i suoni intermedii si producono coll' abbreviare a tempo le loro lunghezze: il che si ottiene premendole colle dita a determinate distanze dal ponticello. Che se la prima corda può dare suoni così profondi, ciò è perchè intorno alla minugia è attorcigliato a canutiglia un filo di rame inargentato.

2° Le corde possono concepire anche delle vibrazioni longitudinali. Queste nascono strisciando le corde nel senso della loro lunghezza con un pezzo di stoffa aspersa di colofonia.

61. Vibrazioni delle verghe, e delle membrane.

I. SCOLII. 1° Le verghe e le lamine sottili di legno, di vetro, di metallo e specialmente d'acciaio, vibrano per elasticità tanto trasversalmente, ove sieno strisciate con un arco; quanto longitudinalmente, se vengano fissate con un punto che le divida in parti aliquote, e poi strisciate nel senso della lunghezza con panno ricoperto di colofonia.

2° Per mettere in vibrazione una lastra, se ne fissa il centro (fig.163.), e poi vi si striscia sull' orlo un arco: oppure (fig.164.), vi si fa un foro al centro, se ne fissa un punto qualunque, e con crini spalmati di colofonia si determina un attrito nel foro.

3° Ricoprendo le lastre con un leggiero strato di sabbia, questa, appena la lastra suona, abbandona le parti vibranti e si raccoglie sulle linee nodali (fig.163, 164.), disponendosi con grande simmetria secondo i suoni che produce. Fu Chladni, che per il primo s'accorse di ciò.

4° Le membrane, purchè sieno ben tese, vibrano tanto per percussione come nel tamburo, quanto per influenza. Infatti la sabbia fina, che sia stata sparsa sopra una membrana, col solo far vibrare lì vicino un corpo molto sonoro, si dispone in figure simmetriche; le quali mostrano i nodi ed i ventri, come avvertì pel primo Savart.

5° Le campane, mentre suonano, dànno quattro linee nodali, che s'incrocicchiano nel punto più alto, dividendo così la campana quasi in quattro spicchi uguali.

6° Lissajous à trovato il modo di rendere visibili le vibrazioni dei corpi sonori, e di confrontarle insieme. Esso fissa

all' estremità di un braccio del corista (fig. 165.) uno specchietto metallico (*m*), ed all' estremità dell' altro un contrappeso (*n*). Ad una certa distanza mette un lume, ne chiude la fiamma in un tubo opaco, in cui trovasi un sottil foro (C), che dà un sol punto luminoso. Poi colloca l' occhio in guisa da vedere l'imagine del punto luminoso in un certo sito (*o*). Allora facendo vibrare il diapason, vede subito l' imagine allungarsi nel senso della lunghezza delle sue braccia;

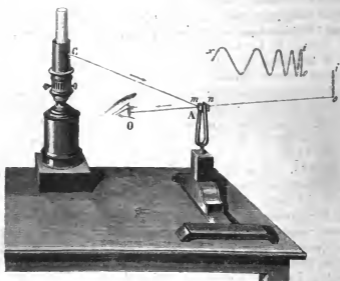



Fig. 165.

e tale imagine persistente si accorcia, quando le oscillazioni diminuiscono in ampiezza. Sostituendo un altro specchio all'occhio, e facendo trapassare il fascio luminoso per una lente di convergenza, l' imagine vien proiettata sopra una tela. Se intanto il corista rota intorno al suo asse, il punto luminoso dà una linea spezzata a zigzag (*iox*). Con due coristi (fig. 166.) uno verticale e l' altro orizzontale, armati dei loro specchietti, il fascetto riflesso descrive una curva (*o*) più o meno complicata, la cui forma dipende dal rapporto, che esiste fra

i numeri delle vibrazioni eseguite nel tempo stesso dai due corpi sonori.

7° Le vibrazioni, compite per influenza dalle membrane, ànno suggerito ultimamente a Leone Scott la felice idea di ottenere rappresentate in carta le vibrazioni producenti un suono qualunque, fosse anche il colpo di un cannone od un suono articolato. Esso à chiamato *fonotografo* lo strumento, che à proposto per ciò. Strumento costituito (fig.167.) da un ellissoide di gesso, aperto da una parte (A), e dall'altra chiuso da un fondo solido; al cui centro è adattata una canna di rame (*a*),

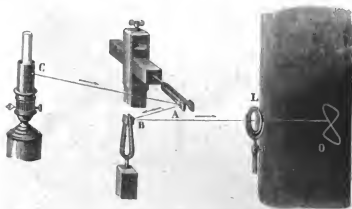



Fig. 166.

che termina con un anello, a cui è raccomandata una membrana di gommelastica. Questa è tesa da un secondo anello per mezzo di viti, e tiene vicino al suo centro uno stilo leggiero (*o*), che è fissato con cera da sigillo, e partecipa a tutti i movimenti della membrana stessa. Perchè poi questo stilo non rimanga sopra un nodo, sull' anello, che fa la tensione, è adattato un pezzo mobile (*i*), detto *suddivisore*, il quale modifica la posizione dei nodi, e fa corrispondere lo stilo ad un ventre. Davanti alla membrana ed in contatto collo stilo vi è un cilindro (C) di rame, che è ricoperto di uno strato di nero di fumo, e che per un manubrio (*m*) può rotare sul suo

asse, ed anche avanzare o traslocarsi, come il *cilindro girante* di Duhamel. Ebbene, appena si produce un suono, la membrana e lo stilo vibrano all'unisono; e girando il manubrio s'imprime sul nero di fumo una linea ondulata, di cui ciascuna ondulazione corrisponde ad una vibrazione doppia dello stilo: di modo che tali figure mostrano il numero, l'ampiezza, e l'isocronismo delle vibrazioni. Tali curve [1] sono più

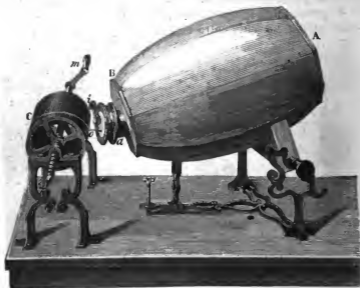



Fig. 167.

ampie per i suoni intensi, più larghe pei gravi, serrate per gli acuti, regolari per una tempra pura, disuguali e tremolanti per un suono incerto. Scott ricopre il cilindro di carta af-

1 La figura 168 mostra la traccia di un tono semplice cantato, e rinforzato dall'ottava alta, che è espressa dalla curva meno ampia. La figura 169 colla sua linea inferiore rappresenta la pronuncia frastagliata della lettera R, e colla superiore le vibrazioni isocrone di un diapason. La figura 170 esprime colla linea superiore le stesse vibrazioni isocrone, e coll'inferiore il fracasso di una lastra di latta colpita colle dita.

fumicata, e con acquarzente e sandracca fissa le immagini dei suoni.

II. LEGGI. 1ª *Il numero delle vibrazioni trasversali delle verghe e delle lamine è in ragione diretta della loro spessezza, ed inversa del quadrato della lunghezza loro.*

2ª *Nelle verghe elastiche della stessa sostanza, ma di qualsivoglia diametro o forma nella sezione trasversale, il numero delle vibrazioni longitudinali è in ragione inversa della loro lunghezza.*

3ª *In lastre della stessa natura e della stessa forma, e pro-*

Fig. 168.

Fig. 169.

Fig. 170.

ducenti le medesime figure, i numeri delle vibrazioni sono in ragione diretta delle grossezze ed inversa delle superficie.

4ª *Il numero delle vibrazioni in una membrana diminuisce coll'aumentarne le dimensioni, e cresce colla tensione.*

62. Vibrazioni negli strumenti a fiato. — Il fenomeno della sirena dimostra che gli aeriformi possono essere sorgenti di suono. Dacchè quando l'aria è limitata e separata dall'atmosfera per mezzo di pareti solide, ed è costretta ad uscire con forza da qualche angusto meato, deve alla maniera de' solidi concepire delle vere vibrazioni.

I. DEFINIZIONI. 1ª Si chiamano *strumenti a fiato*, o *canne*

sonore i tubi (fig. 171., 172.) capaci di produrre de'suoni per le vibrazioni dell'aria.

2ª La stretta apertura (BO), per cui l'aria si getta fuori della canna, dicesi *bocca*.

3ª Il canale (I), per cui l'aria s'avvia alla bocca, vien detto *luce*.

4ª I due orli della bocca chiamansi *labbra*; *superiore* quello (B) fatto a lama, contro cui l'aria va a frangersi, ed *inferiore* l'altro (O).

5ª È chiamata *linguetta* una lamina elastica e flessibile, che in certe canne viene sostituita ad uno dei due labbri.

6ª Le canne diconsi *chiuse*, o *aperte*, secondo che è chiusa o aperta l'estremità opposta a quella, in cui ritrovasi la luce.

7ª Gli strumenti a fiato vengono denominati *a piva*, e in lingua forastiera *ad ancia*, se ànno la linguetta oscillante, se no son detti *a bocca*.

II. LEGGI. 1ª *Le canne disuguali o chiuse o aperte dànno suoni rispondenti a numeri di vibrazioni, che sono in ragione inversa delle loro lunghezze.*

Fig. 171.

2ª *Nelle canne l'aria vibra longitudinalmente, e forma nodi e ventri, stabilendo sempre un nodo al fondo chiuso, ed un ventre alla bocca.* L'esistenza de' nodi si prova coll' introduzione di uno stantuffo: dacchè il suono non è alterato, quando lo stantuffo sta nella superficie nodale. I ventri ritrovansi cercando in qual punto si può tagliare la canna, senza alterarne il suono. Ma l'esistenza e la sede dei nodi può mostrarsi eziandio con una canna rettangolare a pareti sottili, posta orizzontalmente, e sparsa di sabbia: mentre questa saltellando va a raccogliersi nelle linee, in cui giacciono le superficie nodali.

3ª *Quando si forma un nodo solo, la canna chiusa dà il suono fondamentale rispondente ad un'onda o concamerazione lunga il doppio della canna.* Questa legge può considerarsi come un corollario dell'antecedente.

4ª *Le superficie nodali sono immobili e d'incostante densità; ma i ventri vibrano senza che la densità si alteri* [1].

5ª *Una canna chiusa, col rinforzare il soffio, dà successivamente i suoni rappresentati dai primi numeri dispari* 1, 3, 5, 7.... Quando in una canna chiusa formansi due nodi, uno sta al fondo, e l'altro al primo terzo, contando dalla bocca; e però l'onda è due terzi della canna, ossia 3 volte più breve di quella del caso di un nodo solo. Quindi poichè in questo caso il suono à 1, in quello è 3. Parimenti se i nodi sono 3, 4, 5, il suono sarà 5, 7, 9.

6ª *In una canna aperta si costituiscono in ambedue le estremità due ventri.*

7ª *Il suono fondamentale di una canna aperta è l'ottava alta di quello di una simile canna chiusa.* Legge, che può riguardarsi come corollario dell'antecedente e della 3ª.

8ª *Nelle canne aperte il rinforzare del soffio fa variare i suoni, secondo la serie dei primi numeri* 1, 2, 3, 4, 5. Se in una canna aperta vi è un nodo solo, questo sta in mezzo; se ve ne sono due, stanno a un quarto da ciascuna estremità; se ve ne sono tre, ritrovansi al primo, al terzo, al quinto sesto. E perciò nel primo caso il suono è 1, nel secondo è 2, 3 nel terzo, ecc [2].

B O P

Fig. 172.

III. SCOLII. 1° Le leggi ora stabilite dal nome dell'inventore sono chiamate *leggi di Bernoulli*; ma esse non si verificano esattamente nel fatto. A quest'uopo converrebbe che le canne fossero di sezione infinitesima,

1 La figura 173 rappresenta lo stato di una serie di molecule d'aria, quando esse sono giunte ai limiti delle loro escursioni a destra (B) ed a sinistra (A). In G le molecule trovansi nel loro stato d'equilibrio, ossia a distanze uguali. Così apparisce come ai nodi (NN') possa esservi cangiamento di densità senza movimento vibratorio, ed ai ventri (V,V') movimento vibratorio senza che cangi la distanza fra le molecule, e conseguentemente la densità.

2 La posizione dei nodi regola i fori del flauto, e simili strumenti. Dacchè il foro non altera il suono, a condizione che corrisponda ad un ventre.

e che l'aria fosse determinata a vibrare non già in un fianco solo, ma su tutto il contorno della canna. Il fatto è che le canne di qualunque specie dànno suoni più gravi di quelli voluti dalla teoria. Le sperienze possono farsi adattando le canne sul somiere del mantice, che serve per l' esperienza della sirena.

2° Comunemente il labbro, còntro cui urta l'aria, è tagliente; ma nel flauto trasversale, nel piffero, e simili strumenti non vi à che un'apertura circolare. Ciò non ostante anche in questi per la disposizione delle labbra del suonatore, l'aria viene a frangersi contro gli orli della bocca dello strumento, ed è obbligata ad uscire a tratti. Imperocchè l'aria, per l'urto, che soffre sul labbro o sull'orlo della bocca, uscen-

Fig. 173.

do resta compressa fino al punto che per l' elasticità, che ne conséguita, viene respinta e cessa d'uscire: ma la pressione prevale, e nuov'aria s' addensa ed urta sul medesimo labbro; e via discorrendo.

3° Negli strumenti a piva l'aria spinge la lingnetta, l'incurva, e s'apre così un passaggio, ma poi la linguetta per elasticità ritorna al posto suo; ed intercl ude il passo all'aria: dopo nuov'aria si addensa, ed acquista la forza capace di riaprire la linguetta, esce, diminuisce la sua forza, e la linguetta si chiude: nasce quindi una serie d'oscillazioni. Questo avviene, per esempio, nella cennamella, nel bassone, nel chiarino, e nelle trombette de'fanciulli. Si noti (fig. 174.) come in quelle canne da organo, che sono a linguetta, si trova un uncino di ferro, il quale può abbassarsi più o meno, per regolare l'altezza del suono. Negli strumenti poi or ora nominati quest' ufficio è compito dalle labbra del suonatore. Ma nel

flauto, quando tutti i fori sono chiusi, si ottengono come nelle canne aperte i suoni armonici 1, 2, 3, 4,.. facendo variare la distanza delle labbra dall'orlo del foro ovale, e modificando la forza del soffio. Per ottenere i suoni intermedii si aprono i fori incisi al di fuori de' ventri.

4° À influenza sull' altezza del suono la grandezza della bocca. Infatti con una canna, il cui labbro superiore possa sollevarsi, provasi che col labbro allontanato dalla luce si à il suono fondamentale; e quando il labbro si appressa, il suono salta all' ottava alta. Ove diminuiscasi la lunghezza della bocca di una canna qualunque, il suono si abbassa. Per esempio una canna cubica, la cui bocca sia ridotta ad una piccola apertura collocata in un angolo, dà quasi l'ottava bassa del suono che produce, quando la bocca si stende per tutta una faccia. Come parimente il suono d'una canna aperta si abbassa, col ristringere l'apertura superiore. Su quest' ultime due avvertenze sono basati i metodi per accordare gli organi.

Fig. 174.

5° Per dare dell'ampiezza ed una certa tempra ai suoni delle canne a linguetta, all'apertura (fig.174.) superiore delle canne si adattano degli imbuti (H) di forme variate, che diconsi *cornette armoniche*. Negli organi s'imitano le trombe, il corno, la cennamella o oboè, e la voce umana con canne a linguetta dotate di cornette armoniche di forme speciali. Nel trombone, nel corno, e simili quell' allargamento a imbuto ricurvo, detto *padiglione*, in cui terminano, dà ai suoni una maggior forza ed un carattere speciale.

6° Quando l'aria è lanciata in una direzione trasversale alla lunghezza della canna, come nel flauto traverso, entra in vibrazione la canna stessa, ed i suoni riescono più graditi.

7° Gli stromenti a fiato, esclusi quelli *a bocca*, il flauto e simili, possono dividersi in istrumenti *a piva* propriamente detta, come la chiarinetta, e la cennamella, ed in istrumenti *a bocchino* come il corno, il trombone, l'officleide, ed il nuovo elicon, entro la cui voluta s'intromette il torso del suonatore. Negli strumenti a bocchino le labbra dell'artista, e con esse l'aria vibrano più o meno velocemente, secondo che vengono più o meno strette e tese in un imbuto vuoto, o in un emisfero terminato da un tubo che s'adatta al capo dello strumento. Gli antichi corni, e le trombe *a squillo* dànno così i suoni armonici delle canne aperte, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,... Ma per modificare quei suoni che non trovansi nella scala, o nel *modo*, in cui si deve suonare, e per ottenere i suoni intermedii, nel corno si chiude colla mano più o meno l'apertura del padiglione, e come nella tromba l'artista obbliga l'aria a vibrare come le sue labbra, cui acconciamente contrae e mette in un fremito atto a produrre il suono voluto. Nel trombone e tromba *duttile* s'accorcia o s'allunga la canna, con una parte mobile a braccia rettilinee e parallele. Negli antichi strumenti *a chiavi* s'aprono dei fori, quasi come in un chiarino. Negli strumenti *a stantuffi*, e francescamente *a pistoni*, si spinge una specie di tiratori cilindrici a due braccia parallele, che stabiliscono o intercettano la comunicazione con certe parti annesse al tubo, per dare alla colonna d'aria una lunghezza variabile. Nei più moderni, che sono *a cilindri* si ottiene il medesimo effetto premendo allo stesso modo sull'uno o sull'altro di tre tasti; con che si gira come un robinetto, e così il suono viene abbassato a piacere o di un semituono, o di un tuono intero, o di un tuono e mezzo.

Fig. 175.

8° Nell'organo, strumento antichissimo e il più grandioso, tutte le canne sono infilate nei fori di un somiere, nel quale i mantici spingono e addensano l'aria. L'abbassamento del tasto apre l'accesso all'aria stessa in un lungo canale, che corre sotto la fila delle canne, le quali sono disposte in linea normale alla tastiera, e sono accordate tutte all'unisono, ma in diversi *registri*, o tempre, oppure anche in tutti i suoni armonici. Il quale aprimento si effettua per un congegno di fili di ferro, e di squadrette non dissimile da quello dei tiri di campanello. Ciò non ostante non sempre suonano le canne di tutti i registri: perchè l'aria del somiere non va direttamente alla luce della canna, ma ai fori della lista di legno, la quale corre parallelamente alla tastiera sotto tutte le canne producenti le diverse scale, alle quali si estende la tastiera medesima. Onde se il suonatore non *apre* quel dato *registro*, cioè se non sposta quella lista, perchè i suoi fori corrispondano proprio sotto le luci delle canne, l'aria non può entrare in questesse e farle suonare. Vi è inoltre in basso una tastiera, i cui tasti sono detti *pedali*, rispondente ai suoni più profondi, e mosse dai piedi dell'organista. Ma nei grandi organi moderni vi sono fino a 3 altre tastiere coi loro particolari somieri, destinati a contenere aria diversamente densa. Il somiere delle canne più forti costituisce il *grand'organo*; gli altri sono il *positivo*, che dà suoni più deboli, il *recitativo*, che serve per gli *assòli*, e l'*eco*. Il recitativo è chiuso da una così detta *cassa d'espressione*, che à una parete formata da liste di legno girevoli intorno sè stesse, come quelle delle *persiane* delle finestre. L'organista, con un pedale a destra, può collocarle tutte in modo da dare ai suoni ora il piano ed ora il forte.

63. Organo della voce. — Passiamo ora a dare un breve cenno sul più nobile degli strumenti, cioè sull'organo della voce.

I. SCOLII. 1° Gli animali infimi non possono produrre suoni; ed il ronzio degl'insetti è effetto dello stropicciamento delle loro ali, ed altre parti esterne. Ma gli uccelli cantano per mezzo di un organo particolare, detto *laringe inferiore*; che è più complicato in quelli che meglio modulano, ed è posto

là, ove la trachea si biforca nei bronchi. La *laringe superiore*, che sta al principio della trachea, non serve in questi animali che poco o niente alla produzione de' suoni.

2° Presso i mammiferi la voce (fig. 175.) si forma in quella porzione superiore della trachea (T), la quale porzione (*La*) chiamasi *laringe* senza più. Dacchè un' apertura, che venga fatta nell' asperarteria, impedisce la voce solo nel caso che essa trovisi sotto la laringe; e di più col soffiare in una laringe appena estratta dal cadavere, le si fa rendere un suono.

3° La laringe è un tubo largo e corto (fig. 176, e 177.) sospeso all'osso *ioide* (I), ed unito inferiormente alla trachea (T). A le pareti formate da varie cartilagini, che sono la *tiroide* (*t*) co-

Fig. 176. Fig. 177. Fig. 178.

nosciuta sotto il nome di *pomo d'Adamo*, posta anteriormente, ed unita per una membrana all'osso ioide; la *cricoide* (*c*) di forma anulare; e le due *aritenoidi* (*a*) in forma di piramidi curve, articolate indietro all'orlo della cricoide, e coi vertici uno vicino all'altro. Nell' interno la membrana mucosa, che la tappezza, forma nel mezzo due grandi pieghe laterali (fig. 177, e 178.) dirette alla parte posteriore, e disposte quasi come gli orli di un occhiello. Queste pieghe diconsi *corde vocali* o *legamenti inferiori della glottide*, sono abbastanza dense, e di lunghezza proporzionale al pomo d'Adamo, restano fissate a quest'esso ed alle aritenoidi; e, per i movimenti di queste cartilagini, non che per le contrazioni di un piccolo muscolo posto nella loro grossezza, possono venir tese più o meno, av-

vicinarsi od allontanarsi, e così chiudere o aprire la fessura onde sono separate. Alquanto sopra le corde vocali si ritrovano due altre analoghe pieghe della mucosa medesima, le quali sono dette *legamenti superiori della glottide*; e sono denominati *ventricoli della laringe* le due cavità laterali (V), che le separano dai legamenti inferiori. Si dice *glottide* lo spazio compreso fra queste quattro pieghe: e sotto nome di *epiglottide* s'intende una specie di linguetta fibro-cartilaginosa (E), che sta sopra l'apertura superiore della laringe, è fissata colla base sotto la radice della lingua, e può alzarsi obliquamente per la produzione de' suoni, od abbassarsi e coprire la glottide, affinchè nell'inghiottire non vi s' introducano le sostanze alimentari.

4° Aristotile e Galeno considerarono l'organo vocale come uno strumento a fiato; alcuni meno antichi l' ànno ritenuto per uno strumento a corde, nel quale l'aria farebbe l'ufficio dell'arco; e secondo Savart la laringe opera come un *richiamo da uccelli*. Ma quest'ultima teoria è confutata dal fatto che l'ablazione di tutta la parte superiore della laringe (2°) non impedisce la produzione de' suoni; ed è oramai opinione comune che la laringe è un apparecchio tutto speciale, che non può essere rassomigliato a veruno degli strumenti conosciuti.

5° Tutti al presente sono d'accordo nell'ammettere che le corde vocali vibrano come pive membranose, sotto l'impulso della corrente d'aria che viene spinta dai polmoni. Poichè Galeno ammutolì qualche animale vivente col tagliare i nervi, che vanno ai muscoli della laringe, e servono a tendere le corde vocali; ed altri, soffiando nella laringe separata da un cadavere umano, ànno veduto vibrare le corde vocali. L'altezza poi de' suoni dipende dal grado di tensione, dalla larghezza e dalla lunghezza dell' apertura della glottide; cose che vengono determinate dagli spostamenti volontarii delle cartilagini aritenoidi. Cuvier confronta l' ufficio delle corde vocali a quello delle labbra (che in tal caso fanno da pive membranose), che vibrano nel bocchino del corno con una velocità, che dipende dalla tensione, e dal grado di apertura che loro vien data.

6° La glottide (fig. 179.) è distinta in due parti: la posteriore (*o*) rimane dal lato della cartilagine cricoide (*c*), ed è frapposta alle due aritenoidi (*a*); l'anteriore (*n*) corrisponde al ventricolo (*v*), e sta dalla parte della cartilagine tiròide (*t*). Quando si respira, l'aria passa principalmente per la parte posteriore, ma questa chiudesi quando si emettono de' suoni. Mayo in un uomo, che si era tagliata la gola subito sopra alle corde vocali, à veduto che la glottide era triangolare, cioè allargata nella parte posteriore, finchè esso solamente respirava, e diveniva lineare, allorchè volea parlare. Lo stesso è stato osservato in qualche animale da Magendie e da Malgaigne. La voce poi delle femmine e dei ragazzi è più acuta per la piccolezza delle dimensioni della laringe: ed infatti la fessura della loro glottide è circa la metà di quella dei maschi adulti. Longet, per esperienze istituite sulle laringi dei cani, à provato che il ventricolo della glottide serve a rinforzare il suono, come fa la canna della cennamella e della chiarina. Fanno da cornette armoniche le fosse nasali, e la cavità della bocca la quale viene impiccolita, o ingrandita dalla lingua, che s'alza o s'abbassa. Anche la cavità (fig. 175.) del *faringe* (F) può ingrandirsi pei suoni gravi, collo spingere in avanti il velo (V) del palato, e viceversa. Finalmente la pronunciazione dipende dalla posizione e dai movimenti del faringe medesimo, dal velo del palato, dalla lingua, e dalle labbra. L'infante non sa emettere che dei gridi, e se è sordo non saprà mai fare di meglio; ma se ode gli altri, impara a pronunciare, a cantare, a modulare.

Fig. 179.

7° La voce umana è uno dei più sorprendenti capi d'opera della Sapienza Creatrice. La grande varietà di tensioni, per le quali un cantore esercitato può scorrere per un grandissimo numero di semituoni, e di comme, la dolcezza inimitabile delle tempre le più gradite, la graduazione tanto estesa ed esprimente nelle intensità de' suoni, l'inesplicabile pronunzia di vocali e di consonanti così differenti in sè medesi-

me, e cotanto variate presso le diverse nazioni; il largo frutto di sociévolezza, di istruzione, e di perfezionamento che di continuo ne veniamo cogliendo, sono altrettanti oggetti di maraviglia, e stimoli alla pietà. Ma intanto che la prima tende ad aggrandire il nostro concetto della Divinità, lasciamoci guidare dalla seconda, che c'impone di fare della favella un uso veramente nobile e salutare, glorificando il Supremo Essere, che ce n'à fatto dono, ed edificando i prossimi, al cui vantaggio quel dono stesso fu principalmente destinato.

ARTICOLO II.

PROPAGAZIONE DE' SUONI.

64. Raggiamento ed intensità del suono. — I. LEGGI. 1ª *Il suono prodotto da un punto sonoro si propaga tutto intorno per linee rette.* Infatti ove si collochi un orologio a tale distanza dall'orecchio da udirne appena i battiti, si perde l'udienza di questi col solo interporre un fascio di carte nella linea retta, che congiunge l'orologio colle orecchie.

2ª *L'intensità del suono è in ragione inversa del quadrato della distanza.* Questa legge è corollario del cammino rettilineo, come fu dimostrato nella Seconda Sezione della Parte Seconda (**49**. IV. 4ª.): ma può dimostrarsi anche per esperienza. Infatti determinata che sia quella distanza, alla quale appena possa udirsi il tintinnio di un campanello, si verifica che a distanza doppia non si à una simile sensazione che da quattro simili campanelli, a triplice distanza se ne esigono nove, e via dicendo.

3ª *L'intensità del suono aumenta coll'ampiezza delle vibrazioni del corpo sonoro.* Ciò è manifesto nelle corde: le quali subito dopo al colpo vibrano molto ampiamente, e poi sempre meno; e intanto il suono si fa sempre meno intenso. È poi naturale che per colpi più forti, dati ad una campana per trarne suoni più intensi, debbano nascere in essa vibrazioni più ampie.

4ª *L'intensità del suono aumenta colla densità del mezzo*

ambiente il corpo sonoro. Si prova collo svegliarino sotto la campana di una macchina pneumatica o di una macchina di compressione. Il suono si rinforza col condensar l' aria, s' indebolisce invece col rarefarla. E quest' ultima cosa accade ancora quando all'aria si sostitnisce l'idrogene.

5ª *Il vento secondo aumenta l'intensità del suono*, *l'avverso la diminuisce*. Giornaliere osservazioni sull'intensità de'suoni mandati dalle campane di chiese lontane lo dimostrano.

II. DEFINIZIONI. 1ª Le linee rette, secondo le quali il suono si propaga, vengono chiamate *raggi fonici*.

2ª I corpi, che lasciano passare il suono, ossia che possono fare da veicoli di esso, ricevono l'appellazione di *diafonici*.

3ª Sono denominati *adiafonici* quelli, che non sono atti a trasportare il suono.

Fig. 180.

III. SCOLII. 1° Sono diafonici tutti i corpi, che godono della elasticità dei solidi: adiafonici poi sono tutti i corpi solidi molli, o che costituiscono un acervo non elastico.

2° La legge del quadrato della distanza non vale nel caso che il suono propaghisi dentro un tubo. Biot riconobbe che in un tubo lungo 951 metri, destinato a condurre le acque a Parigi, la voce perde così poco della sua intensità, che due persone possono da un capo all'altro di esso conversare a voce bassa. Quindi l'uso dei *tubi parlanti* o *acustici*. Fra questi i così detti *portavoce* (fig.180.), i quali possono farsi anche di gomma elastica, e le *trombe stentoree* o *marine* servono a trasmettere i suoni a distanza grande nei vasti edificii o da una nave ad un' altra. Quelli poi che diconsi *cornette acustiche* o *cerbottane* (fig.181.) sono formati da un tubo conico di metallo, una delle cui estremità termina in un padiglione, e l'altra s'introduce nell'orecchio dei sordastri. Ap-

partiene a quest'ultima classe lo strumento, il cui padiglione dapprima applicavasi unicamente al petto, e però da στῆθος *petto* fu chiamato *stetoscopio*; al quale ricorrono i medici per stabilire la diagnosi di certi malori, o determinare qualche particolare stato fisiologico dalla qualità de' suoni concomitanti i movimenti del corpo animale.

65. Velocità del suono nei diversi mezzi. — I. LEGGI. 1° *Il suono per giungere dal corpo sonoro all'orecchio impiega tempo assai sensibile*. Giacchè il colpo di un cannone si ascolta sempre dopo all' apparenza della luce, e la differenza fra le due sensazioni è tanto maggiore, quanto il cannone è più distante. Inoltre i soldati facenti parte di un battaglione e molto distanti dalla banda o dai tamburi dànno passi, che non coincidono colle battute del suono; come può vedersi da chi cammina vicino ai tamburi o alla banda.

Fig. 181.

2° *La velocità dei suoni è indipendente dall'altezza, intensità, e tempra loro*. Imperocchè una musica che venga eseguita ad un capo di un condotto da acqua, esempigrazia, viene ascoltata all'altro capo senza veruna alterazione. Ora se i suoni bassi, i meno intensi, ed i più aspri fossero dotati di velocità minore di quella, onde propagansi gli acuti, i forti, e i dolci, la melodìa si scomporrebbe, la divisione della battuta sarebbe alterata, e forse due suoni discordanti si soprapporrebbero nell'orecchio di un lontano ascoltatore.

3° *La velocità de' suoni è equabile*. Dacchè notando con buoni cronometri il tempo, in cui si produce il suono, e quello in cui giunge ad orecchie variamente distanti, si è sperimentato che i ritardi sono esattamente proporzionali alle distanze.

4° *La velocità del suono è varia pei diversi mezzi*. Si sono fatte sperienze da Colladon e Sturm nel 1827 sul lago di Ginevra, e si è trovato che la velocità del suono nell'acqua

è di 1435 metri a secondo. Biot, esperimentando nei tubi di ghisa, provò che in questa il suono percorre ogni secondo 3570 metri. Nei fili telegrafici Wertheim e Breguet ànno trovato la velocità di 8485 metri. Prony, Arago, Humboldt e Gay-Lussac nel 1822 ànno concluso dai loro sperimenti che la velocità del suono nell'aria a 0° è di metri 331,12, ed a 10° è 337,2. È dunque la velocità del suono maggiore nei solidi che nei liquidi, e maggiore ancora in questi che negli aeriformi: e di più vi sono notabili differenze fra i diversi corpi di un medesimo stato [1].

5° *La velocità del suono nell'aria è indipendente dalla densità e pressione di questessa, e dalla forza del vento, purchè questo spiri in direzione perpendicolare alla propagazione di quello*. Molti fatti àuno dimostrato tal legge.

II. SCOLII. 1° Per determinare l'influenza, che può avere sulla velocità del suono un vento obliquo, bisogna decomporre la forza del vento in due; una normale e l'altra coincidente colla direzione stessa del suono. Poichè la prima componente non altera la velocità; l' alterazione giusta sarà data dalla somma o dalla differenza fra la velocità del suono, e quella della seconda componente del vento.

2° Questa alterazione è stata eliminata nelle sperienze sulla velocità del suono nell'aria col seguente metodo. Adoperavansi due cannoni posti ai capi di una linea abbastanza lunga, e si dava fuoco ad entrambi nell' istante medesimo; e prendevasi la media fra i tempi, che il suono impiegava a percorrere quella linea nei due versi contrarii.

1 Questi fatti sperimentali poco differiscono dai risultati delle formule matematiche. Newton ed altri geometri analizzando lo stato del gasse durante la propagazione del suono (cosa, che noi faremo quanto prima), sono giunti alla espressione $v = \sqrt{(e : d)}$; ove d rappresenta la densità del gasse, ed e la sua elasticità. Si noti che $e = ag\Delta$, purchè esprimasi per a l'altezza del barometro, per g la gravità, per Δ la densità dell'idrargiro a 0°. Da tal formula si ricava la velocità di 333 metri. Laplace pei liquidi à stabilito la formula $v = \sqrt{(g : l)}$, che conviene anche ai solidi; ove g rappresenta la forza acceleratrice della gravità, ed l la quantità, di cui s'allunga o s'accorcia una colonna cilindrica della sostanza considerata, avente per lunghezza l'unità, e stivata con una forza equivalente al suo peso.

60. Risuonanza, battimenti ed eco. — Eccoci a ricercar più dappresso i riscontri, che ànnosi numerosissimi fra il suono e la luce.

I. scolii. 1° È cosa comunemente nota che il suono di un corista si rinforza, se invece di tenerlo in aria si appoggia su di una scatola di legno. Ognuno conosce l'aumento d'intensità, cui ricevono i suoni dei violini, della chitarra, del pianoforte per la cassa d'aria sottoposta alle corde.

2° Quando produconsi ad un tempo due suoni gravi, risultanti da vibrazioni, le quali poco differiscano fra loro in numero, si odono delle alternative di rinforzamento ed indebolimento, che succedonsi ad intervalli uguali. E se tali alternative sono abbastanza frequenti, non riescono distinti che i colpi di forza. Anzi ove questi colpi di forza si replichino almeno 32 volte a secondo, formano un suono grave, il quale odesi nel tempo stesso che i due suoni primitivi; come può verificarsi colla così detta *sperienza di Tartini*. Per la quale con due snoni forti e sostenuti, prodotti esempigrazia da due canne d'organo, una delle quali sia accordata alla quarta dell'altra, ottiensi un terzo suono molto più profondo.

3° Producendo un suono alla campagna aperta e ad una certa distanza da qualche edificio, talora avviene di sentirne la replica nel sito stesso ove quel suono fu prodotto. Che se il suono è articolato, talvolta odesi ripetuta l'ultima sillaba solamente, tale altra si ascoltano le due ultime; e può darsi anche il caso di sentir ripetere tre o quattro o più sillabe. Anzi può accadere che, nel luogo stesso, di quelle sillabe abbiansi perfino due o più repliche.

4° Oltracciò v'à delle stanze, nelle quali pronunciando in un angolo una parola, questa si sente più distintamente nell'angolo opposto, che in qualsivoglia punto intermedio.

II. definizioni. 1ª Il rinforzarsi del suono per la vicinanza di una cassa, o di un tubo d'aria, oppure di un corpo sonoro qualunque, è chiamato *risuonanza*.

2ª Chiamasi *cassa di risuonanza* quella, per la cui influenza il suono è rinforzato.

3ª I colpi rinforzati, che soli rimangono distinti quando produconsi due diversi suoni contemporanei, diconsi *battimenti*.

4ª È detto *suono risultante* quello più grave, che è costituito dai battimenti; e *suoni componenti* quei due, che producono il risultante.

5ª La replica di un suono nel sito stesso, ove è prodotto, à nome *eco*.

6ª L'eco è detta *semplice* o *molteplice* secondo che il suono è ripetuto una volta o più.

7ª È poi denominata *monosillaba* o *polisillaba* l'eco a seconda che essa replica una o più sillabe.

8ª Col nome di *camere* o *volte parlanti* intendonsi quei siti, nei quali un suono è meglio inteso all'angolo opposto a quello, in cui è prodotto; che nella retta frapposta.

III. ALTRI SCOLII. 1° I battimenti consistono nella coincidenza delle vibrazioni. Infatti supponiamo che le vibrazioni dei suoni componenti principino nel tempo stesso, ossia le prime vibrazioni coincidano; siccome esse non ànno la medesima durata, un'altra coincidenza non avverrà un istante appresso, ma dopo un certo numero di vibrazioni. Le coincidenze poi daranno per sè sole un altro suono, che riuscirà più grave: perchè esse sono men frequenti delle vibrazioni dei suoni componenti.

2ª Prima d'andar oltre si deve avvertire come in Acustica sia invalsa la consuetudine di rappresentare con dei numeri inferiori l'ottava o la scala, a cui appartiene un dato suono. I suoni esempigrazia della seconda ottava o scala del violoncello si seguano do_2, re_2, ecc.; quelli della terza si scrivono do_3, re_3; quelli poi di una o due ottave più bassi della prima si rappresentano con do_{-1}, re_{-1}, ecc.; do_{-2}, re_{-2},....

3ª Pogniamo che uno dei due suoni componenti nasca da cn vibrazioni a secondo, e l' altro da cn', essendo c il massimo comun divisore dei numeri di esse vibrazioni; un battimento succederà dopo n vibrazioni del primo suono, ed n' del secondo. Così le coincidenze si ripeteranno c volte a secondo, ed i battimenti saranno tanto più distanti quanto c sarà più piccolo, o più gravi saranno i suoni medesimi; e per uno stesso valore di c, quanto i numeri n ed n' saranno più grandi per una differenza medesima, o quanto i suoni saranno più vicini fra loro. Il che spiega perchè le più piccole diffe-

renze fra due suoni unisoni, ed anche fra due ottave, producano una insoffribile stuonazione. Per la qual cosa se venga proposto di trovare il suono risultante in confronto ad un suono fondamentale di N vibrazioni in un determinato tempo, rappresentino cn e cn' i numeri delle vibrazioni dei suoni simultanei,ed N, n, n' sieno interi e primi fra loro. Ciò posto nel dato tempo accadranno c coincidenze, vale a dire il suono risultante verrà prodotto da c vibrazioni eseguite nel tempo dato, oppure da $c:N$ intanto che il suono fondamentale ne fa 1. Dal che apparisce che ove i numeri delle vibrazioni sieno interi, il suono risultante sarà prodotto dal massimo comun divisore dei numeri delle vibrazioni dei componenti, diviso pel numero delle vibrazioni del suono fondamentale durante il tempo medesimo. Sia *do*, a cagion d'esempio, il suono fondamentale; ove nel tempo stesso vengano prodotti i suoni *mi* cioè $^5/_4={}^{15}/_{12}$, e *fa* ossia $^4/_3={}^{16}/_{12}$, facendo il *do* 12 vibrazioni intanto che *mi* ne eseguisce 15, e 16 ne produce il *fa*; il suono risultante sarà $^1/_{12}$: perchè in tal caso $c=1$. Or bene: il suono $^1/_{12}$ non è che $^4/_3 : 2^4$, ossia fa_{-4}. Parimente *do* e *fa* dànno $^1/_3$. ciè fa_{-2}.

4° La risuonanza è più sensibile per l'azione di un corpo disposto a dare un suono unisono a quello, che viene rinforzato: come pure le camere vuote dànno maggior risuonanza che le piene o le tappezzate di drappi flessibili e non elastici. D'altra parte se la risuonanza provenga dall'azione di corde elastiche, queste si veggono vibrare appena vibra il corpo sonoro. Tutto ciò coincide colla supposizione che la risuonanza non sia che un altro suono prodotto dai corpi elastici prossimi, in virtù delle vibrazioni impresse in essi dall'aria scossa dal corpo sonoro: in altri termini i fatti combaciano coll'ipotesi che la risuonanza sia una vera *diffusione di suono*: come appunto la diffusione di luce proviene dalla lucidità, che acquista ogni punto di una parete bianca col solo presentarle un corpo lucido. Onde manifestamente si pare come il rinforzo del suono, che ottiensi con una cassa di risuonanza, si debba alle vibrazioni concepite dall'aria contenutavi. Il che diviene anche più evidente per l'esperimento istituito da Savart. Con un arco da violino (fig.182.) si fa vi-

brare un vaso emisferico (A) di rame; vicino al quale ritrovasi un cilindro cavo (B) di cartone, aperto nella sua estremità prossima al detto vaso, e chiuso nell'altra. Il suono del vaso riesce con ciò mirabilmente rafforzato. Ma poichè il cilindro è fissato sopra una colonna verticale, e girevole intorno al suo asse; così avviene che il suono perda o riacquisti la sua straordinaria intensità, a seconda che col girare di detta colonna o la base, o la bocca del cilindro viene rivolta verso il corpo sonoro.

5° Allora si à l'eco o semplice o molteplice, quando incontro al sito, in cui si pronuncia una parola ritrovansi uno o più ostacoli, che impediscono al suono di andare oltre. E sempre si avvera che, nel caso dell'eco monosillaba, l'ostacolo dista circa 17 metri; è distante 34, cioè 17×2, nel caso della dissillaba; 51, ossia 17×3, quando è trisillaba, e così via dicendo.

6° Supponendo che il suono venga riflesso da un ostacolo, o da un corpo capace di vibrare sotto gli impulsi dell'aria, che lo trasporta, l'eco si spiega a maraviglia. Dacchè se i raggi fonici rimbalzano sull'ostacolo, e ritornano donde partirono; il suono, che essi producono, deve ritardare in proporzione della lunghezza del loro viaggio. Ed invero in termine di un secondo si possono pronunciare a un dipresso dieci sillabe; e però per la pronunciazione di una sillaba impiegasi un decimo di secondo. Inoltre il suono à tal velocità nell'aria, che in un decimo di secondo percorre 34 metri. Ond'è che quando un ostacolo è distante 17 metri, il suono nell'andare e venire impiega un decimo di secondo. Per la qual cosa nel sito dov'è colui, che pronuncia una data parola sotto queste condizioni, ritorna il suono della prima sillaba allorchè esso sta pronunciando la seconda, allorchè cioè l'orecchio suo è fortemente modificato da tal pronunciazione; il suono della seconda arriva quando il medesimo pronuncia la terza; ma il suono dell'ultima ritrova l'orecchio disoccupato, ed è sensibile. Che se l'ostacolo distasse il doppio, due sillabe intere riverrebbero all'orecchio allorchè ritrovasi tranquillo: e l'eco sarebbe polisillaba. Come pure più ostacoli distanti quali 17, quali 34, quali 51 metri faranno sì che il suono dell'ultima

sillaba ritorni dopo uno, due, e tre decimi di secondo dacchè fu pronunciata: e così l'eco riesce molteplice. Appunto come con due specchi ànnosi più visioni di un medesimo oggetto. Tutta la differenza sta in ciò, che per la moltiplicità della visione, i raggi lucidi debbono produrre due imagini in siti diversi della retina; quando per la moltiplicità dell' udienza, i raggi fonici debbono colpir l'orecchio in tempi diversi.

7° Anche il fenomeno delle camere parlanti si spiega assai bene ricorrendo alla riflessione. Infatti quel fenomeno può ripetersi a piacere per mezzo di due specchi ustorii: dacchè due individui possono conversare fra loro secretamente e a voce assai bassa, ancorchè ritrovinsi alla mutua distanza di alcuni metri; a condizione per altro che quegli, che parla, tenga la bocca al fuoco di uno dei due detti specchi, e colui, che ascolta, tenga l'orecchio al fuoco dell'altro.

Fig. 182.

8° È analoga la spiegazione del corno acustico, e stetoscopio.

IV. COROLLARII. 1° Dunque il suono, incontrando uno o più ostacoli elastici, vien diffuso tutto intorno, come se quegli ostacoli stessi fossero altrettanti corpi sonori.

2° Dunque il suono su certi corpi elastici acconciamente disposti soffre la riflessione regolare, secondo le leggi di Catottrica.

3° Dunque la velocità del suono riflesso è ugnale a quella del suono diretto. Altrimenti il suono riflesso da un ostacolo distante 51 metri non produrrebbe l'eco trisillaba.

4° Dunque allorchè vengono prodotti simultaneamente i suoni armonici 1, 2, 3, 4,.... non ascoltasi che il suono 1. Imperocchè, secondo quello che abbiamo veduto nel 3° scolio, i suoni 3, 5,... combinati due a due dànno il suono 1 per risultante; i suoni 2, e 4 dànno il suono 2, che aggiungesi a quello già esistente nella serie. Ciò non toglie che i suoni componenti non sieno alquanto sensibili, per attribuire almeno al suono fondamentale una tempra tutta singolare; come avviene nell'organo, il cui il registro della cornetta è formato da 5 canne, che dànno i suoni armonici.

67. Rifrazione ed interferenze del suono. —

I. SCOLII. 1° Si uniscano per mezzo di un anello di latta due uguali porzioni di un involucro sferico di collodio; e questa specie di lente empiasi con gass'acido carbonico. Ove nella direzione dell'asse principale si collochi da una parte un orologio e dall'altra l'orecchio; si avrà una prova di fatto, che i battiti dell'orologio ànno la maggiore loro intensità presso al foco principale della lente. Dal che si raccoglie che anche il suono, nel passare da un mezzo ad un altro, devia e si rifrange; e che questa rifrazione va soggetta alle leggi stesse, che regolano la luce.

2° Prendasi un corista, accordato al *do* vigesimanona del *do* basso del violoncello, le cui braccia distino a vicenda di 3 pollici, ossia 8 centimetri. Si fissi verticalmente questo corista su di un disco di legno orizzontale, a cui si possa imprimere un lento movimento di rotazione, in maniera che le braccia del corista debbano passare di uno in altro azzimutto. Un orecchio collocato a distanza ne udirà il suono, allorchè ritrovasi nella linea orizzontale che trapassa per le due braccia dello strumento; ma cesserà di ascoltarlo, quando la detta linea fa angolo retto con quella, che unisce l'orecchio al corista. Accade altrettanto ove le due braccia di questo distino fra loro 3, 5, 7 volte più della sopraddetta quantità. La quale per altro dev'essere diversa, ogni volta che il diapason è accordato a dare un altro suono. Donde agevolmente si inferisce che anche i suoni subiscono le interferenze secondo le note leggi ottiche.

II. DEFINIZIONE. Dicesi *fuoco acustico* il punto, in cui con-

vengono tutti i raggi fonici, che provengono parimenti da un punto sonoro, e sono riflessi da uno specchio concavo, o rifratti da una lente biconvessa diafonica.

68. Produzione delle onde nell'aria. — Veniamo ora a ricercare più dappresso la maniera, onde l'aria trasmette i suoni.

I. scolii. 1° Sia LM (fig. 183.) una lamina elastica fissata in M; la quale, per una fessura longitudinale intromettendosi nel tubo ABT aperto, e però pieno d'aria, termini dentro esso in una paletta costituita da un disco circolare uguale alla sezione interna del tubo. La lamina venga inflessa, col portarne la paletta L in A, e subito abbandonata a se stessa. Per la elasticità d'inflessione essa dovrà mettersi ad oscillare; ed in virtù della forza costante e continua, ond'è animata, dovrà alla maniera di un pendolo (**34.**) salire da A verso L con velocità crescente, e poi con decrescente velocità discendere da L fino a B; quindi trapassando per le stesse fasi di celerità ritornare in A, e così di sèguito. Insomma alla prima oscillazione ne succederanno delle altre; le quali riusciranno sempre meno ampie, ma tutte isocrone fra di loro.

Fig. 183.

2° Vediamo ora quali modificazioni nascano nell'aria contenuta nel tubo per l'oscillare della paletta. Supporremo per chiarezza che la lamina compia una oscillazione in un minuto secondo giusto, e considereremo parte a parte gli effetti prodotti nell'aria in ciascun decimo di secondo. Or bene: nel primo decimo la paletta fa un primo passo, urta l'aria contigua, la quale, compressibile com'è, viene a condensarsi: non tutta per altro, ma quella sola che forma lo strato prossimo, perchè la condensazione va comunicandosi di lamina in lamina d'aria; cosicchè spirato il detto decimo di secondo essa avrà modificato un decimetro d'aria, per dire una cosa. Rappresenteremo colle dieci porzioni eguali di una linea retta OX (fig. 184.) dieci decimetri o strati d'aria, e colla

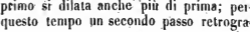
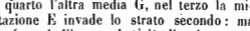
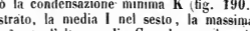
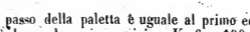
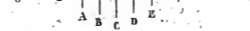
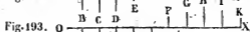
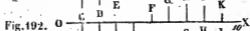
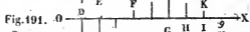
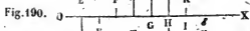
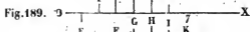
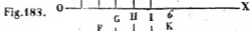
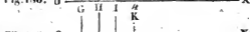
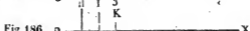
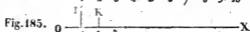
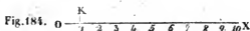
normale K la quantità di condensazione attribuita al primo strato d'aria. Se dopo ciò il disco si fermasse, questa condensazione verrebbe successivamente comunicata agli strati prossimi dell' aria ; intanto che il primo strato per la sua elasticità ritornerebbe lamina per lamina alla sua densità ordinaria. Quindi è che nella ipotesi medesima, che cioè il disco s' arresti dopo il primo passo, la condensazione passerà successivamente di strato in istrato a sempre maggior distanza dal disco, e gli strati prossimi ritorneranno alla loro primiera ed ordinaria densità: come in una fila di palle elastiche, mentre la compressione va correndo lungo esse palle, ciascuna palla appena passata la trasformazione riprende la sua figura per la successiva restituzione. Il che in figura dovrebbe rappresentarsi col traslocare la lineola K parallelamente a se stessa sul 2, sul 3, ecc.

3° Dunque dopo un secondo decimo di minuto la condensazione sarà passata ad un secondo strato spesso parimente un decimetro. Ma frattanto il disco non è fermo; fa un secondo passo, che per la sua velocità accelerata sarà più esteso del primo; e però non ancora il primo strato d'aria avrà principiato a riprendere la sua densità ordinaria, quando di nuovo verrà compresso e condensato anche più di prima. Ond'è che allo spirare del secondo decimo di secondo lo strato primo avrà la densità maggiore I (fig.185.) e il secondo la minima K. Nel terzo decimo di secondo la condensazione minore K (fig.186.) dello strato secondo passerà ad un terzo strato d'aria; ma intanto il secondo strato riceverà la condensazione maggiore I ed il primo pel terzo passo della paletta più ampio dei precedenti verrà ad addensarsi di nuovo anche maggiormente. Nel quarto decimo la condensazione minima K (fig.187.) passerà ad un quarto strato d'aria, la maggiore I al terzo, la massima H al secondo; ed il primo strato dovrà condensarsi pel quarto passo della paletta. Questo passo per altro sarà meno esteso del precedente, anzi uguale al secondo. Dunque il primo assumerà la densità G simile a quella I del terzo. Durante il quinto decimo di secondo, la condensazione minima K (fig.188.) passerà ad un quinto strato, la maggiore I al quarto, la massima H al ter-

zo, la meno grande G al secondo; ed il primo riceverà pel quinto passo della lamina, il quale sarà breve come il primo, una condensazione F uguale a quella del quinto strato. E così cinque strati d'aria sono simmetricamente condensati.

4° Nel sesto decimo di secondo, intanto che passa nel sesto strato la condensazione minima K, nel quinto la media I, nel quarto la massima H, nel terzo l'altra media G, e nel secondo l'altra minima F; il primo strato, pel ritrarsi del disco L (fig. 183.) che da B principia a ritornare verso A, dovrà per la espansività dell'aria rarefarsi, acquistare cioè una densità minore del consueto. Questa densità rappresenteremo per la lineola E (fig. 189.) ortogonale, ma sottoposta ad OX, alla maniera di un'ordinata negativa; lineola che faremo uguale a K ed

F, perchè il sesto passo della paletta è uguale al primo ed al quinto. Dopo ciò la condensazione minima K (fig. 190.) passa nel settimo strato, la media I nel sesto, la massima H nel quinto, nel quarto l'altra media G, nel terzo la minima F, e la dilatazione E invade lo strato secondo: ma frattanto lo strato primo si dilata anche più di prima; perchè il disco fa in questo tempo un secondo passo retrogra-

do più ampio del primo. È chiaro ora che nell'ottavo decimo di secondo è l'ottavo strato che à la condensazione minima K (fig.191.), la media I l'à il settimo, la massima H il sesto, l'altra media G il quinto, l'altra minima F il quarto; il terzo riceve la dilatazione minima E, il secondo la maggiore D, ed il primo pel terzo passo retrogrado della paletta più ampio degli antecedenti assume una dilatazione ancora maggiore. Nel nono decimo di secondo si comunica al nono strato (fig.192.) la minima condensazione K, la media I all'ottavo, la massima H al settimo, la media Q al sesto, la minima F al quinto; al quarto trapassa la minima dilatazione G, al terzo la media D, la massima C al secondo, ed il primo strato pel nono passo della lamina si dilata come il terzo. Allo spirare del decimo tempuscolo, ossia del minuto secondo, il decimo strato (fig.193.) riceve la minima condensazione K, il nono la media I, l'ottavo la massima H, il settimo l'altra media G, il sesto la minima F; intanto che al quinto trapassa la dilatazione minima E, al quarto la media D, al terzo la massima C, l'altra dilatazione media al secondo B, e l'altra minima al primo A.

II. DEFINIZIONI: 1ª Chiamasi *onda condensata* l'insieme degli strati d'aria, che ànno ricevuto una densità maggiore dell'ordinaria.

2ª Per *onda rarefatta* s'intende tutto il cumulo di strati di aria, i quali subirono una densità minore del consueto.

3ª L'insieme delle due onde condensata e rarefatta à nome *ondulazione* ed anche *onda*.

4ª Si dice *lunghezza dell'onda* la sua estensione, ed *ampiezza* la sua maggior densità ed espansione.

69. Ondulazioni dell'aria, e loro applicazione. — I. SCOLIO. Conviene avvertir bene che nella produzione e propagazione delle onde si ànno due moti distinti. Uno è quello, cui concepisce ciascuna molecola d'aria per stringersi addosso alle sue vicine nell' onda condensata, e per fuggire dalle medesime nell' onda rarefatta. L'altro è quello, per cui queste condensazioni e rarefazioni si propagano nel veicolo, e presto giungono a grande distanza. La velocità di questo secondo moto non dipende dall'urto mag-

giore o minore che riceve l' aria, o dalla escursione più o meno grande, più o meno rapida della lamina; ma dalla densità del mezzo, e dalla sua elasticità: anzi, secondo Newton (63.I.4ª), è in ragione diretta della radice quadra dell'elasticità, ed inversa della radice pur quadrata della densità. Il moto poi, che concepisce l' aria è una vera oscillazione; per la quale, andando ora di qua ed or di là, dà origine alle condensazioni ed alle rarefazioni. E la velocità maggiore di tali oscillazioni dipende dalle escursioni più ampie della lamina, le quali fanno sì che l'aria più strettamente si stivi nelle onde condensate, e più largamente si espanda nelle rarefatte.

II. COROLLARII. Dalla superiore avvertenza discendono due importanti corollarii.

1° Dunque l'effetto dell'oscillare più celere del disco è produrre nell'aria ondulazioni più corte. Perchè l'estensione di ciascuno degli strati, affetti da una delle fasi delle condensazioni o rarefazioni, dipende necessariamente dal tempo impiegato dalla paletta a fare l'intera escursione. E infatti essendo nel medesimo mezzo costante la velocità di propagazione, se l'oscillazione della lamina si compie in un tempo più lungo, la condensazione sarà giunta più lontano quando principia a formarsi la rarefazione: e viceversa. Per conseguenza la frequenza delle oscillazioni del disco produce, a parità di velocità di propagazione, onde più lunghe, e maggior frequenza di colpi dell' aria ondulante su di un dato ostacolo.

2° Dunque l'ampiezza maggiore delle oscillazioni del disco rende più stivate le onde condensate, e più dilatate le rarefatte. Imperocchè le oscillazioni più ampie danno urti più forti all' aria: la quale perciò durante il medesimo tempo dee ristringersi in più breve spazio, e quindi allargarsi in uno maggiore. Il che produce maggior velocità al moto di oscillazione dell'aria, che va e viene per addensarsi e dilatarsi, e colpi più violenti dell' aria stessa sugli ostacoli, cui incontra.

III. ALTRI SCOLII. 1° Le oscillazioni del disco rappresentano in grande le vibrazioni delle molecule di un corpo sonoro; ed anche le oscillazioni, che in conseguenza vengono

compiute dalle molecule dell' aria considerata come veicolo de'suoni. Ora (fig. 194.) posto che un corpicciuolo, o una piccola sferetta, alternamente s'ingrossi e s'impiccolisca, cioè aumenti e diminuisca in diametro; nello spazio, da cui esso è circondato, debbono formarsi tanti strati concentrici di aria alternamente più o meno densa dell'ordinario. I quali strati costituiranno tante ondulazioni, che sotto forma di croste sferiche concentriche diffondonsi e propagansi tutto intorno al corpo sonoro. Per conseguenza il suono si propaga per ogni verso, e si propaga per linee rette; ed i raggi fonici seguono l'andamento dei raggi geometrici delle dette croste sferiche costituenti le onde sonore.

2° È manifesto che i suoni prodotti da vibrazioni più ristrette debbano originare nell'aria delle condensazioni, e delle rarefazioni più piccole. E quindi le oscillazioni che in tal caso eseguirà l'aria saranno più ristrette, ed i colpi dà essa impressi all'orecchio riusciranno più deboli, e se ne risentiranno de'suoni meno intensi.

3° È anche facile a vedersi che le oscillazioni dell'aria diverranno meno ampie, e le condensazioni e le rarefazioni riusciranno minori, ove esse ritrovinsi a maggior distanza dalla sorgente del suono. Imperocchè ciascuno strato d'aria, oscillando, urta lo strato prossimo e lo determina ad oscillare. La quantità di moto rimarrà quindi costante, ma la velocità dovrà diminuire. Anzi l'intensità del suono dovrà decrescere col quadrato della distanza. Dappoichè tale intensità è in ragione diretta della velocità delle molecole aeree; questa velocità è in ragione inversa della massa d'aria determinata a vibrare; e le masse costituenti i singoli successivi strati d'aria, spessi ugualmente, stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi, ossia come i quadrati delle distanze dei singoli strati dal centro di moto o dalla molecula sonora vibrante.

4° Non accade così quando viene determinata ad ondulare l'aria racchiusa in un tubo cilindrico. In tal caso ciascuno strato, ugualmente spesso, à la stessa massa; e la velocità impressa si manterrà sotto questo riguardo costante. Perciò coi tubi parlanti o portavoce si tramandano i suoni a distanze grandissime.

5° Poichè le vibrazioni più frequenti producono nell'aria onde più ristrette, e suoni più acuti, evidentemente l'altezza de' suoni dipende dalla lunghezza delle onde e dalla frequenza dei colpi dati dall'aria all'orecchio. Si è quindi cercato di determinare la lunghezza delle onde per ciascun suono musicale: la qual cosa è riuscita facilissima. Ed in vero si sa che il suono si propaga nell'aria a temperatura 0° colla velocità di 1024 piedi o 340 metri a secondo. Dunque se la molecula sonora facesse una sola vibrazione a secondo, l'onda sarebbe lunga 1024 piedi, o 340 metri. Per conseguenza il suono il più basso sensibile, che è prodotto da 32 vibrazioni, verrà trasportato da onde lunghe 1024:32 o 340:32, ossia piedi 32, metri 10 circa; il *do*, che è prodotto da 128 vibrazioni, sarà propagato da onde lunghe 8 piedi, o metri 2,6; il *do* sarà dato da vibrazioni lunghe pollici 3 ossia 8 centimetri.

Fig. 194.

70. Spiegazione della riflessione, della rifrazione, e delle interferenze del suono. — Il ritornare indietro, ed il deflettere dei suoni, non che il loro alternare in certi casi col silenzio riceve una facile spiegazione nella teoria delle onde.

I. scolii. 1° Quando (fig. 196.) le onde sonore (MKN) incontrano un ostacolo (PQ) seguono la legge generale dei corpi elastici; esse ritornano indietro formando delle nuove onde perfettamente simmetriche alle incidenti. Dappoichè quel punto (K) dell'onda, che è il primo ad incontrare l'ostacolo, è anche il primo a rimbalzare indietro; e quando non voglia supporsi che la velocità di ritorno sia differente da quella di andata, tutti gli altri punti nel rimbalzare debbono nel medesimo istante ritrovarsi tanto al di qua dell'ostacolo, quan-

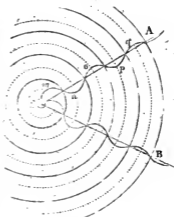
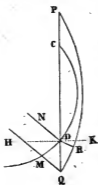
to ne sarebbero al di là se avessero proseguito il loro cammino. E così il suono si propagherà come se provenisse dal sito simmetrico (S) al punto sonoro, verrà cioè regolarmente riflesso.

2° Quando invece le onde debbano passare da un mezzo ad un altro, cioè proseguire il loro cammino in una seconda sostanza di densità diversa dalla prima, cangerà anche la velocità della loro propagazione. Poniamo che tal velocità venga a diminuire: è chiaro che le onde (CoD) nel secondo mezzo riusciranno meno curve, ed il loro centro virtuale (V) starà fuori del centro reale (A), donde veramente dimanano. Per lo che i raggi fonici nel secondo mezzo prenderanno una via (VR), la quale sarà tanto più differente da quella (AD), cui seguivano nell' incidenza; quanto saranno più diverse le velocità delle onde nei due mezzi; vale a dire subiranno una rifrazione proporzionale alla differenza delle medesime velocità.

Fig. 195.

3° Ove poi col girare il corista avvenga che l'onda rarefatta prodotta da un suo corno, incontrisi colla condensata prodotta dal vibrare dell'altro, certamente i due movimenti si elideranno a vicenda, e l'ondulazione rimarrà distrutta; e per conseguenza al suono succederà il silenzio. Nel che consiste la interferenza de' suoni.

II. COROLLARII. Dalle spiegazioni or ora esposte fluiscono quasi altrettanti corollarii le leggi, che soglionsi verificare nelle riflessioni, rifrazioni, ed interferenze de' suoni.

1° Dunque l'angolo di riflessione è uguale a quello d'incidenza. Imperocchè sono uguali i due triangoli rettangoli (fig.196.) AKC, SKC, aventi un cateto comune CK, e l'altro AK, SK uguale per la simmetria di S con A. Perciò l'angolo $ACK = SCK$. Ma $SCK = BCP$, perchè uno opposto al vertice coll'altro. Dunque $ACK = BCP$. Ora questi due ultimi angoli sono i complementi dell'incidenza e della riflessione. Dunque ec.

2° Dunque l'angolo d'incidenza e quello di riflessione giac-

ciono nel piano stesso. Infatti il centro (A) delle onde incidenti, il centro (S) delle riflesse ed il punto (C) d'incidenza determinano tanto il piano d'incidenza, quanto quello di riflessione. Dappoichè nel piano determinato da quei tre punti giace il raggio incidente (AC), il raggio riflesso (SC) ed anche la perpendicolare (CH) sollevata dal punto d'incidenza; come quella che è parallela alla retta (AS) congiungente i due centri delle onde, e passa per un punto (C) giacente nel piano determinato dai detti tre punti.

3° Dunque, ove trattisi degli stessi mezzi, fra il seno dell'incidenza ed il seno della rifrazione deve mantenersi un rapporto costante. Si considerino due raggi ND, MQ (fig.195.)

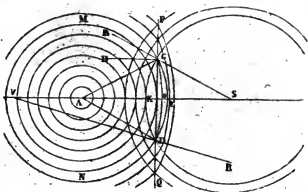



Fig. 196.

incidenti sul piano dirimente PQ e vicinissimi fra loro; essi riusciranno sensibilmente paralleli, e la porzione DM di onda incidente frapposťavi sarà fisicamente piana. Quindi la MQ sarà seno dell'angolo MDQ. Facendo trapassare pel punto d'incidenza la perpendicolare HK, gli angoli MDQ ed NDH, come quelli che sono formati da lati rispettivamente perpendicolari, saranno uguali. Ma NDH è l'angolo d'incidenza: dunque la MQ sarà seno dell'angolo d'incidenza. Rappresenti PRQ l'onda rifratta, e DR la porzione di raggio rifratto intercetto fra l'onda incidente e la rifratta. Questa DR è seno dell'angolo DQR. Ma gli angoli DQR e KDR sono u-

guali per la sopraddetta ragione; e di più KDR è l'angolo di rifrazione: dunque DR è il seno dell' angolo di rifrazione. Or bene: questi due seni stanno fra loro in un rapporto costante. Giacchè essi rappresentano le rispettive velocità di propagazione nel primo mezzo e nel secondo. E poichè tali velocità dipendono dalla natura e densità dei mezzi medesimi, così finchè trattasi degli stessi mezzi il rapporto delle due velocità, e dei due seni non può variare.

4° Dunque i due piani d'incidenza e di rifrazione giacciono nel piano stesso. Dacchè pel solo variare della velocità di propagazione del suono, il centro delle onde rifratte cesserà

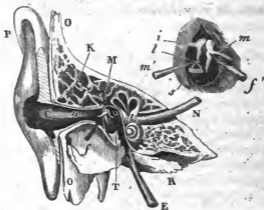



Fig. 197. Fig. 198.

di coincidere con quello delle onde incidenti, ma seguiterà a stare nel piano stesso perpendicolare al dirimente.

5° Dunque il silenzio per interferenza non potrà aversi che nel caso, in cui due raggi fonici differiscano fra loro in cammino di mezz'onda. Giacchè solo in tal caso l'onda rarefatta dovrà sovrapporsi esattamente alla condensata, e ciascuna molecola d'aria sarà contemporaneamente determinata a due velocità uguali in intensità ed opposte in direzione; e però dovrà restare tranquilla.

71. Organo dell'udito. — A completare il discorso sulla trasmissione de' suoni è necessario aggiungere poche parole sull' organo, che prepara le sensazioni dell'udito.

SCOLII. 1° L' organo dell' udito si distingue in tre parti, o cavità, una interiore, l' altra media, ed esteriore la terza. L' esteriore consiste (fig. 197.) in una specie di *padiglione* (P), che termina in un canale (Cu), chiamato *canale uditorio*, alquanto tortuoso, rivestito di peli e di una sostanza molle, cui chiamano *cerume*. Il fondo di tal meato è chiuso da una pellicola (M) assai tenue, e tesa, denominata *membrana del timpano*.

2° Succede quindi la cavità media (T) che vien chiamata *cassa del timpano*, ed è ossea, tapezzata da diverse membrane e piena d'aria. Il timpano à quattro fori; uno mette al canale membranoso (E) nominato *tromba eustachiana*, che va a terminare nelle fosse nasali, e serve a far comunicare l'aria della cassa coll'atmosfera; due altri sono opposti alla membrana del timpano, sono chiusi da una membrana finissima, e dalla loro forma sono denominati, uno *finestra ovale*, e l'altro *finestra rotonda*; il quarto stabilisce una comunicazione colle grandi cellule (R), che trovansi nella parte superiore della così detta *rocca*. Nel timpano medesimo ritrovansi quattro piccoli ossi (fig. 198.), che formano la così detta *catena degli ossetti*. Uno (*m*) chiamasi *martello*, ed à una branca attaccata alla membrana del timpano, la quale può restarne premuta sotto l'azione di un piccolo muscolo (*f*, *f'*); gli altri sono la *incudine* (*i*), l' *orbicolare* (*o*), e la *staffa* (*s*), che per un piccolo muscolo (*g*) si appoggia sulla membrana della finestra ovale.

Fig. 199.

3° La cavità interiore porta il nome di *laberinto*, e contiene I. tre *canali semicircolari*, II. *la chiocciola* che è canale conico ravvolto in due spire e mezzo (fig. 199.) intorno ad una colonna ossea (*o*, *o*), III. una capacità (*o*) chiamata *vestibolo*, alla quale metton capo i tre detti canali, e la chiocciola. Questa è separata dal timpano per la membrana del foro rotondo, ed è divisa da due tramezzi longitudinali (*c*, *c*) interrotti alle estremità, cosicchè le due parti comunicano in-

sieme. Il vestibolo poi è separato dal timpano pel foro ovale. Tanto il vestibolo come la chiocciola sono ripieni di un liquido trasparente, che dall'italiano scopritore porta il nome di *linfa di Cotugno*; e l'interno del laberinto membranoso è ripieno di un liquido gelatinoso, cui chiamano *vitrina uditiva*. Partono dalla midolla allungata (fig. 197.) due nervi (N) detti *acustici*, ciascuno dei quali penetra nel laberinto di una delle orecchie a traverso di un canale osseo chiamato *condotto uditivo interno*, e si spartisce in quattro rami; uno va nel vestibolo, due altri nei canali semicircolari, e la prolungazione del tronco entra nella chiocciola.

4° La spiegazione più probabile dell'udienza è la seguente. Le ondulazioni sonore dell'aria esterna si comunicano alla membrana del timpano, la quale le trasmette per mezzo della cátena degli ossetti alla membrana che chiude il foro ovale e per mezzo dell'aria della cassa alla membrana del foro rotondo. Il liquido che empie il laberinto e bagna queste membrane concepisce esso pure delle vibrazioni; vibrano parimente i numerosi filamenti del nervo acustico, i quali galleggiano nel detto liquido, e da queste scosse derivano le modificazioni del sensorio comune producenti nell'animo le sensazioni. Si obbietta a questa teoria, che la membrana dovrebbe prestarsi ad un gran número di suoni differenti. Ma si risponde che la detta membrana à una tensione variabile, e forse il martello modifica tale tensione premendo più o meno su di essa; e ciò istintivamente, come l'occhio per vedere meglio si dispone differentemente secondo l'intensità della luce, la distanza, ed i colori diversi. E tale risposta viene oggi appoggiata a varie considerazioni sperimentali. Ma gli altri ossetti, e la forma della chiocciola, e dei canali semicircolari a che servono? Finora non se ne sa nulla.

5° Comunque ciò sia, questa stessa nostra ignoranza, ed il mirabile meccanismo della propagazione de' suoni e dell' udizione è adattatissimo a risvegliare in noi il sentimento della piccolezza nostra, e della grandezza del Creatore.

CAPO SECONDO.

OTTICA.

72. Tema del presente capitolo. — Molti a dir vero sono gli argomenti, che intorno ai fenomeni della luce potrebbero essere assai utilmente trattati coll' aiuto dell'Algebra; ma la più parte di essi eccede i limiti della istruzione elementare. Il perchè noi ci limiteremo qui a dire in due distinti Articoli alcune poche cose sopra i due sistemi di Ottica, che sono più in voga, e dei quali abbiam fatto un rapido cenno nella Sezione Seconda (**38**, I. 1° e 2°) della Parte Sperimentale.

ARTICOLO I.

TEORIA CORPUSCOLARE.

73. Ipotesi fondamentali nel sistema dell'emissione. — I sostenitori della teoria corpuscolare principiano dal richiedere a titolo di postulati alcune leggi, che non potrebbero essere dimostrate nè dal concetto nè dal fatto.

I. POSTULATI. 1° *La luce si compone di particelle materiali e resistenti, emesse tutte pressochè colla medesima velocità.*

2° *Tali particelle sono dotate di forze attrattive e ripulsive; ma queste forze non sono uguali in tutte, nè ànno i rapporti stessi cogli altri corpi. Anzi le particelle stesse differiscono eziandio nella massa e nella resistenza,* o (come impropriamente chiamano) *nella inerzia.*

3° *Allorchè le particelle luminose colpiscono la retina, producono lo stimolo, donde nasce la visione. Le più resistenti dànno la sensazione di rosso; eccitano invece la sensazione di violetto quelle, che fanno una resistenza minore.*

4° *Le molecule lucide e le ponderabili esercitano una mutua azione attrattiva o ripulsiva, che è sempre in funzione colla distanza, onde sono separate. Quando tal distanza è al di sotto di un certo limite assai prossimo fino al contatto, prevale l'attrazione; predomina invece la ripulsione al di là del

limite stesso. La riflessione, che accade sulla superficie esterna, devesi alle forze ripulsive; ed alle attrattive la rifrazione e la riflessione interna.

5° *La resistenza di tali forze non solo divaria per la natura dei ponderabili, ma anche per la diversa specie di molecule luminose. Esse sono analoghe alle affinità chimiche, ed alle forze elettive: quindi la disuguale rifrangibilità dei raggi.*

6° *Il moto di ciascuna molecula lucida è regolato dalle ordinarie leggi della Dinamica. E però se ne può calcolare esattamente la traiettoria.*

7° *La distanza fra le molecule ponderabili è eccessivamente piccola, in confronto alla loro sfera d'attrazione e ripulsione verso la luce. Ciò non ostante le forze, che producono la riflessione e la rifrazione, sono affatto insensibili ad una distanza apprezzabile dalle particelle, che le esercitano.*

8° *Ogni particella luminosa, durante tutto il suo tragitto, si ritrova in una serie di fasi periodiche, dette accessi di facile riflessione e di facile trasmissione. Talchè essa è disposta ad obbedire alle forze ripulsive del mezzo, cui incontra, duranti le prime fasi; ed alle forze attrattive, duranti le seconde. Queste alternative possono attribuirsi tanto ad un moto di rotazione delle molecule sui loro assi, pel quale dovrebbero ad un dato mezzo prestare successivamente i loro poli d'attrazione o di ripulsione; quanto a qualche altra cagione.*

II. Scolii. 1° La settima ipotesi serve a calcolare matematicamente la via percorsa da una molecula luminosa. Dacchè essa è libera da qualsivoglia forza apprezzabile fino al momento, in cui tocca la superficie del mezzo; e perciò non può deviare sensibilmente dalla linea retta. Quando poi essa medesima è penetrata fra le molecule, deve essere attratta e respinta ugualmente in ogni senso; e però dovrà procedere rettilineamente. Per la qual cosa il raggio non s'inflette che a quella distanza insensibile da ambidue le facce del piano dirimente, alla quale si estende il diametro della sfera d'attività di ciascuna molecula.

2° Poste le quali cose, la traiettoria può riguardarsi come un' iperbola, i cui rami sono costituiti dalle linee rette descritte prima e dopo l'incidenza. Questi rami confondonsi cogli as-

sintoti, e la parte curvilinea non occupa che un punto fisico. Nei fenomeni per altro della riflessione e della rifrazione non è necessario occuparsi della natura di tal curva; natura che dipende necessariamente dall'azione corpuscolare, ed è assai difficile a determinare. Quello che interessa di conoscere si è la direzione, cui dee prendere il raggio dopo la sua incidenza, e la costanza od il cangiamento della sua velocità.

3° Secondo Newton gli accessi *dispongono* le molecule alla riflessione o alla trasmissione, esaltano le forze che tendono a produrre l'una, e deprimono quelle che operano in favore dell'altra; ma la sola natura del mezzo fa prevalere le une alle altre, specialmente sotto il concorso di circostanze favorevoli. Però se il raggio incidente sarà assai obliquo, oppure non farà che sfiorare la superficie, la riflessione sarà assai abbondante. E veramente nei mezzi diafani la riflessione cresce coll'angolo d'incidenza.

71. Spiegazione della riflessione e rifrazione.— I. SCOLII. 1° A spiegare la riflessione si suppose dapprima che le molecule luminose fossero perfettamente elastiche, e perfettamente piane le superficie riflettenti; e si riportò il fenomeno alla riflessione (**28**.) dei corpi elastici. Ma le dette superficie in riguardo alla tenuità delle molecule lucide sono notabilmente irregolari. Inoltre perchè la riflessione à luogo anche alla superficie posteriore di un mezzo elastico, e non nelle lamine intermedie? Infine come si concilia quest' urto col fatto che il raggio, il quale cade sul vetro sotto un angolo maggiore di 41°, invece di trapassare nel vetro è rimbalzato? Per queste ragioni Newton ricorse alla forza di ripulsione. Per meglio intendere come questa operi, la celerità del raggio obliquo si divide in due, una parallela e l' altra normale al piano dirimente. Quella è costante; e questa viene ritardando a misura che il raggio s' immerge nella sfera d' attività della forza ripulsiva, e poi è distrutta affatto. Per la qual cosa per risultante prima si à un piccolo ramo di curva; poi la componente normale vien diminuendo; allora il raggio ritorna indietro, e nasce un secondo ramo di curva uguale e simile al primo. Essendo per altro assai angusta la sfera di attività della forza ripulsiva, quelle cur-

ve riusciranno assai piccole e però insensibili; quindi sembrerà che il raggio, appena toccato il piano, si rifletta.

2° La riflessione regolare pertanto dev'essere più copiosa sulle superficie meglio levigate: perchè nelle superficie scabre le asprezze essendo rivolte in sensi diversi esercitano forze di ripulsione, che riescono antagoniste fra loro. Inoltre la componente normale diminuisce coll'obliquità del raggio incidente; e però con questa aumenta la luce riflessa.

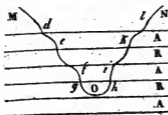



Fig. 200.

3° Questa spiegazione non s'attaglia solo al caso, in cui la luce dall'aria imbatte in un opaco, che à maggior forza di ripulsione; ma si ancora a quello, in cui il raggio passa da un corpo più denso nell'aria. Dacchè se è vero che in questa la ripulsione è più debole, per compenso è in quello più forte l'attrazione; e queste due forze cospirano a far ritardare il raggio incidente, e a fare accelerare il riflesso.

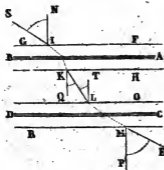



Fig. 201.

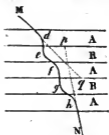
4° Imaginiamo che la superficie del mezzo compongasi (fig. 200.) di una serie di strati (A, R, A,...) sottilissimi, nei quali dominino alternamente le forze attrattive (A, A,..) e le ripulsive (R, R,...) delle molecule, e ciascun dei quali possa riguardarsi come esteriore a quello che lo segue. Il raggio incidente (Md) è rettilineo fino al punto (d), in cui comincia a soffrire l'azione del mezzo. Ma se la prima crosta è attrattiva, s'incurverà esponendo la concavità al piano dirimente; e crescerà la componente normale della sua velocità. Dopo entra nella sfera della forza ripulsiva, e s'incurverà di nuovo, esponendo la convessità alla superficie; la

velocità normale diminuirà durante questo tragitto; e così di sèguito. Supponiamo ora che il raggio abbia una velocità così debole da poter essere annientata, oppure traversando una certa lamina (O) soffra una ripulsione assai forte; certamente il raggio dovrà muoversi per la sola componente parallela alla superficie (O). Ma intanto la ripulsione continua; ed il raggio è costretto a ritornare indietro. Da indi in poi, le forze essendo uguali ma inverse alle antecedenti, la molecula lucida descriverà dall'altra parte un altro ramo (*hiklN*) simile in tutto al primo. Il che vuol dire che avrà luogo la riflessione secondo la nota legge.

5° Ove per altro accada o che il raggio abbia una velocità iniziale assai grande, o che le forze ripulsive sieno deboli in rapporto alle attrattive, la molecula lucida potrà traversare gli strati ed entrare nella regione, in cui le forze ond'è sollecitata ritrovansi in equilibrio, prima che la componente perpendicolare sia distrutta. In tal caso la sua strada (fig.202.) resterà tutta dentro il mezzo; ed accadrà la rifrazione.

Fig. 202.

6° Per meglio intendere come l' indice di rifrazione rimanga costante, bisogna entrare in qualche ulteriore particolarità. Siccome il raggio perpendicolare non si rifrange, così i newtoniani opinano che le forze attrattive e ripulsive sieno dirette perpendicolarmente alla superficie. Quindi le molecule luminose del raggio SI (fig.201.) giunte alla distanza insensibile FG dal mezzo saranno attratte normalmente alla superficie AB, e comincieranno a deviare. Trapassata che abbiano tal superficie AB, l'attrazione comincia a diminuire, ed alla distanza HT termina affatto. Decomposta in due la velocità del raggio, la componente parallela rimane invariabile, e la normale va crescendo da FG fino ad AB; e così il raggio descrive una curva, di cui la prima tangente è la direzione primitiva. Questa curva arriva al limite interiore HT, dove la forza cessa di essere varia; ed allora ripiglia la direzione rettilinea KL secondo l'ultima tan-

gente della curva descritta. Tal curva è piccolissima e però a noi sembra che il raggio si spezzi in un punto. In questo modo i newtoniani calcolano tal curva, la velocità e la deviazione del raggio rifratto, e provano che l'indice di rifrazione è indipendente dall'angolo d'incidenza, e non esprime che il rapporto della velocità delle molecule luminose avanti e dopo l'immersione nel mezzo.

7° Il raggio rifratto dopo aver preso la via retta, nell'avvicinarsi alla seconda superficie CD, giunto alla sfera di attività OL della forza attrattiva principia a deviare, e cessa al limite esteriore RM della forza medesima. E siccome le forze in ambedue le superficie ànno l'intensità medesima, e la stessa sfera di attività, la curva d'immersione IK sarà uguale a quella d'emersione LM. Solamente questa offrirà la convessità, e quella la concavità alla superficie AB, perchè il raggio viene ritardato nella prima, ed accelerato nella seconda. Essendo poi parallele le due superficie AB, CD, e quindi anche le due normali KQ, LT, l'angolo d'incidenza seconda KLT sarà uguale a quello di rifrazione QKL; e però l'angolo di emersione EMP sarà uguale a quello d'incidenza prima SIN; cioè il raggio emergente avrà celerità costante, ed uguale a quella dell'incidente.

II. DEFINIZIONE. È stato chiamato *potere rifrangente dei corpi* il quadrato dell'indice di rifrazione diminuito dell'unità e diviso per la densità del mezzo; ossia la quantità, che deve assumersi per misura delle forze attrattive.

75. Diffrazione, anelli colorati, birifrazione, e polarizzazione. — Sulla teorica corpuscolare di questi fenomeni non daremo che brevissimi cenni.

I. DEFINIZIONI. 1° È stata detta *asse di traslazione* la linea retta che, trovandosi per ipotesi nell'interno della molecula lucida, segue l'andamento del raggio lucido.

2° *Asse di polarizzazione* fu chiamata la retta, che supponesi parimenti nell'interno della molecula lucida, è ortogonale all'asse di traslazione, e giace nel piano di polarizzazione.

II. SCOLII. 1° Secondo Newton fra i varii raggi, che lambiscono gli orli di un opaco, alcuni inflettonsi per attrazione verso questo, altri se ne allontanano per ripulsione, ed

altri proseguono la loro primitiva direzione. Ma contro tale spiegazione si oppone che nei fenomeni di diffrazione non abbia veruna influenza la densità, la grossezza, la figura, e la materia dell'opaco.

2° Gli anelli colorati si spiegano cogli accessi. E qui si avverta che questi suppongonsi posti ad intervalli disuguali nelle molecule lucide provenienti da un corpo luminoso o trasmesse da un diafano. Sebbene a dir vero gli accessi non bastino per sè soli, e debbasi aver riguardo anche alla forza riflettente dei ponderabili: tanto che, se tal forza sia energica assai, possono essere riflesse anche le molecule, che sono nel cominciare o nel finire del periodo di facile trasmissione e viceversa. Quindi è che la riflessione speculare avviene dopo che la luce à traversato una spessezza sufficiente d'aria, e prima che le sue molecule giungano al corpo riflettente: la diffusione poi nasce dalle molecule, che penetrando nel corpo sono riflesse ad una certa profondità. Inoltre le lunghezze degli accessi sono minori pei raggi più rifrangibili, e variano col passare dei raggi da un mezzo ad un altro: lunghezze che Newton ricavò dalla grossezza del mezzo, in cui si riflette o trasmette il raggio di un colore qualunque. Indicata quindi con g la spessezza che produce la riflessione di una qualche specie di raggi, lo stesso raggio conserva la tendenza ad essere riflesso da tutte le grossezze rappresentate da $3g$, $5g$, $7g$, ecc., e ad essere trasmesso alle distanze $2g$, $4g$, $6g$, ecc. Ma l'una o l'altra tendenza non à il suo effetto che presso la seconda superficie: dacchè in questa, che è in contatto col mezzo adiacente, sono riflesse le particelle lucide, le quali trovansi in un accesso di facile riflessione; e le altre, che sono in quello di facile trasmissione, si rifrangono passando nel detto mezzo.

3° Per dar ragione dei colori supponesi I. che i corpi per la porosità risultino da molti piccolissimi gruppi di particelle; II. che tali gruppi rifrangano la luce più del mezzo frappostovi; III. che in ciascuno di essi la riflessione e la trasmissione avvenga come nelle lamine sottili. Ciò posto, alcuni raggi passano per gl'interstizii dei gruppi, ed escono inalterati nello spazio; pochi altri sono riflessi dai gruppi; altri entra-

no nel gruppo, si rifrangono forte, e pigliando accessi più corti e più rapidi assai, giungono alla seconda superficie del gruppo. Fra questi ultimi quelli, che trovansi in un accesso di facile riflessione, sono riflessi e formano il colore; quelli che sono nell'altro accesso passano oltre, e battono in un altro gruppo. Allora, se il primo gruppo non à riflesso tutti i raggi proprii a formare il suo colore, una porzione ne rifletterà il secondo, un'altra il terzo, e così di mano in mano: e la somma di tutte queste riflessioni darà il colore al corpo. Però il colore di questo è più vivace quando si espone alla isocroma zona spettrale. Ma fra i raggi trasmessi da tutti i gruppi alcuni forse non ànno subito veruna riflessione, ed emergendo dànno un colore diverso. Finalmente alcuni raggi non sono nè reflessi nè trasmessi, e perciò il colore trasmesso non è complementare del riflesso. Insomma i colori sono un fenomeno analogo a quello degli anelli: dacchè le tinte naturali, o dipendenti da combinazioni chimiche, sono composte come quelle degli anelli, variano colla grossezza delle molecule riflettenti, e nell'ordine stesso, in cui variano i colori degli anelli; ed i colori riflessi vuoi dai corpi, vuoi dalle lamine sottili, riescono cangianti sotto incidenze diverse.

4° I newtoniani a spiegare la birifrazione vogliono che una porzione del raggio incidente, entrando nel cristallo, sia talora respinta, e talora attratta da una forza, che emana dall'asse di questo, o da una linea parallela all'asse medesimo; e che questa porzione, separandosi dal raggio rifratto, formi il raggio straordinario.

5° Malus fondò la sua teorica della polarizzazione riferendo ciascuna molecula lucida a tre assi rettangolari presi nel suo interno; uno de' quali è l'asse di polarizzazione, l'altro quello di traslazione, ed il terzo è la retta ortogonale ai sopraddetti. Secondo lui, un raggio polarizzato è quello, in cui gli assi omonimi di ciascuna molecula lucida si trovano paralleli fra loro. Le forze polarizzanti in tal sistema si suppongono ripulsive, e forse sono le forze stesse riflettenti, o ànno con queste un'intera relazione; ma nei birifrangenti credonsi essere le medesime che le forze rifrangenti. Comunque ciò sia, queste forze non fanno altro che rendere l'asse

di polarizzazione parallelo o normale ai piani, cui si riferisce la polarizzazione stessa. Allorchè lo rendono parallelo, le forze dei corpi, cui la luce si appressa, lo respingono, e le molecule lucide sono riflessibili: allorchè è normale, le forze, operando con uguale intensità sulle due parti uguali dell'asse di polarizzazione le quali restano a destra e a sinistra dell'asse di traslazione, non possono riflettere le molecule lucide; e queste cadendo sul trasparente rifrangonsi, e si dice che divengono rifrangibili. Le forze ripulsive producono effetti diversi sulle molecule differenti: perchè alcune di questesse trovansi nel mezzo, ed altre nel fine di un accesso. Quindi alcune particelle si polarizzano ed altre no. Quindi la polarizzazione per riflessione e per rifrazione à luogo in versi opposti: infatti le molecule lucide, trovandosi in diverso stato, alcune ànno gli assi ridotti nel piano d'incidenza, ed altre in un piano normale; e però dapprima in parte si riflettono ed in parte si rifrangono. Quindi finalmente, se le due sezioni principali nei cristalli di spato fanno un angolo tra lo 0° ed il 90°, si biforca tanto il raggio ordinario, quanto lo straordinario: poichè le due forze polarizzanti dei raggi non essendo nè parallele nè normali all'asse di polarizzazione delle molecule, ciascuna tende a farlo girare nel suo verso o parallelo o normale in quelle molecule, sulle quali opera.

6° Biot à preteso di dare la spiegazione anche dei colori della luce polarizzata. Secondo lui le particelle di luce semplice, che ànno i poli orientati nel modo stesso nel raggio incidente, penetrano dapprima nella lamina cristallizzata fino ad una certa profondità *e*; mantenendo la loro orientazione. Poscia si mettono ad oscillare di qua e di là della sezione principale, in tal maniera da compire un' intera oscillazione mentre viene percorso lo spazio uguale a 2*e*. Per la qual cosa la luce si diporterebbe come se la lamina fosse omogenea, nel caso che questa avesse una spessezza uguale ad *e*. Che se tale spessezza fosse 2*e*, il piano di polarizzazione all'emergenza sarebbe deviato di una quantità uguale all'ampiezza delle semioscillazioni delle particelle; e se fosse 3*e*, la deviazione sarebbe nulla. Quindi le differenze d'intensità se-

condo la spessezza, quando i raggi semplici sono ricevuti sopra un analizzatore fisso. E poichè i valori di *e* sono differenti per i diversi colori semplici; ne consèguita che la luce bianca deve uscirne colorata. Le particolarità ed applicazioni di tal sistema; oltre che riescono assai prolisse ad esporsi e difficili ad intendersi, sono state combattute con tante e tali difficoltà da Fresnel, Arago, ed Ampère, che possono ritenersi come completamente confutate. Per lo che possiamo, anzi dobbiamo astenerci dal proporle.

7° Ecco dunque a che doveano riuscire tanti studii, e tanti calcoli istituiti da uomini sommi per ridurre la luce ad una emanazione di corpicciuoli sottilissimi. Finalmente ci accorgiamo che tale ipotesi manca di solida base, e forse non è che un dotto sogno. Profittiamo almeno di queste lezioni, e non vi sia fra le persone colte verun presuntuoso, che, trovata in un nuovo sistema una certa verosimiglianza e coincidenza coi fatti, subito ardisca menarne trionfo. Ninno si lusinghi di saper approfondare i misteri del regno della Natura, e molto meno quelli del regno della Grazia: niuno ardisca spingere la sua audacia fino al segno di criticarli e biasimarli. Riconosciamo una volta la fiacchezza de' nostri lumi, e la grandezza infinita dell'Onnipotente.

ARTICOLO II.

SISTEMA DINAMICO.

76. Ipotesi fondamentali, e propagazione della luce. — Anche il sistema delle onde poggia sopra varie ipotesi, che vengono richieste a mo' di postulati.

I. POSTULATI. 1° *Un mezzo elastico, estremamente sottile, inerte, e senza peso, chiamato etere, riempie tutto lo spazio, e penetra tutti i corpi. Esso non offre verun ostacolo al moto degli astri, sia perchè è estremamente rado, sia perchè li traversa liberamente.*

2° *Le molecule dell'etere possono essere messe in moto per l'agitazione di particelle ponderabili; e comunicare l'impulsione ricevuta a tutte le prossime.* Così il moto si propaga col-

colle stesse leggi dinamiche, le quali regolano le ondulazioni dei mezzi elastici ponderabili.

3° *Nell'interno dei mezzi ponderabili l'etere si trova in uno stato d'elasticità vario secondo la loro natura; e sempre minore, in rapporto alla sua densità, che non nel vuoto: più il mezzo è rifrangente, meno l'etere vi è elastico.*

4° *Le vibrazioni si propagano a traverso dei mezzi in virtù dell'etere interno; ma in essi procedono con minore velocità.*

5° *Le vibrazioni regolari dell'etere, scuotendo i nervi della retina, producono nell' animo la sensazione di luce. Colla maggiore ampiezza di esse vibrazioni si associa la vivezza maggiore della luce, dalla varia frequenza delle medesime nascono i diversi colori.*.

6° *Il raggio luminoso non è altro che una retta normale alla superficie dell'onda eterea; cioè a quella superficie, i cui punti sono insieme scossi.*

7° *Le oscillazioni dell' etere nell' onda luminosa sono perpendicolari al raggio.* Si fanno cioè nella superficie dell'onda: come avviene nelle onde sonore.

II. SCOLII. 1° La legge del cammino rettilineo e per ogni verso della luce è conseguenza del moto ondulatorio. Infatti (fig.203.) ciascuna particella (A,B,C,D) d'etere, la quale è posta in agitazione dalle vibrazioni del punto lucido (S), genera una propria onda sferica. Ma tutte le onde sferiche prodotte dalle dette particelle s'intersecano; e colle loro intersecazioni generano una superficie inviluppante *(abcd)*, sferica essa pure, la quale costituisce l'onda risultante: intanto che per i movimenti contrarii si distruggono a vicenda tutte le altre porzioni delle onde parziali. L' onda risultante genera nelle molecule consecutive un nuovo ordine di onde parziali, e queste formano una nuova onda risultante più ampia; e così di sèguito. In tal guisa la superficie generale dell' onda propagasi come esistesse sola; e si va rarefacendo, e si dilata a misura che il moto si comunica alle molecule consecutive. Perciò elidendosi i moti laterali restano quelli soli, che stanno nella direzione dei raggi geometrici; vale a dire delle rette condotte dal punto lucido a qualsivoglia punto della superficie dell'onda.

2° È chiaro che l'intensità della luce è in rapporto coll'impressione fatta dalle molecule dell'etere sulla retina in un dato tempo; e perciò coll'ampiezza di escursione, cioè colle loro velocità assolute. Ora tale ampiezza va in ragione inversa della distanza, pel principio della conservazione delle forze vive. Per conseguenza, ove suppongasi che l'impressione fatta sulla retina sia proporzionale alla forza viva, siccome questessa sta in ragione diretta dal quadrato della velocità; così l'intensità della luce dee decrescere col quadrato della distanza. In questa dimostrazione si considera la forza viva, la quale risulta dal quadrato della velocità moltiplicato per la densità dell'etere; e ciò per la seguente considerazione. Allorchè un fascetto lucido si spartisce in due, esempigrazia per birifrazione, in un mezzo perfettamente diafano, non vi à perdita di luce; cosicchè la somma delle intensità rimane costante, sebbene cangino di grandezza e di segno le velocità assolute delle molecule in vibrazione. Se il decrescimento si supponesse in ragione inversa della semplice velocità, il principio del moto uniforme del centro di gravità ci costringerebbe a ritenere, contro il fatto, per costante non la somma, ma la differenza delle intensità.

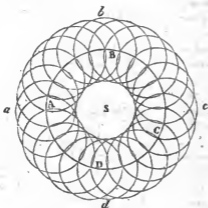



Fig. 203.

77. Riflessione e rifrazione nel sistema dinamico.

I. SCOLII. 1° Quanto alla riflessione poniamo (fig. 204.) che delle onde sferiche *mb*, *m'c*, *an*,..., aventi il loro centro in S, giungano obliquamente sopra una superficie piana *a*O, che separa due differenti mezzi. Se una serie di scotimenti perviene alla superficie di separazione di due mezzi elastici diversi, ciascun punto di tal superficie diventa il centro di due

sistemi d'onde sferiche; uno dei quali s'introduce nel secondo mezzo, e l'altro ritorna nel primo. Quest'ultimo costituisce la riflessione. Per maggior chiarezza (fig. 204.) imaginiamo che l'onda incidente *bm*, avente il suo centro in S, incontri la superficie dirimente *a*O in *b*: questo punto diventa centro di scotimento, da cui parte un'onda sferica, la quale giunge colla sua superficie alla distanza *bp* = *ma*, quando l'onda *bm* è arrivata in *a*. Allorchè l'onda perviene in *cm'*, il punto *c* produce un'onda sferica, il cui raggio sarà *cq* = *m'a*; quando l'onda incidente è giunta in *a*. Intanto tutti i punti della superficie *ab* anno generato delle onde sferiche, di raggio crescente da *a* verso *b*; le quali, prolungate sotto *ab*, dànno una onda sferica risultante, il cui centro è in S; mentre abbiamo *cq'* = *am'*, *bp'* = *bp* = *am*,.... Preso dunque il punto S' simmetrico ad S riguardo al piano *a*O, e descritta una sfera *an'* col raggio S'*a*; questa rappresenterà l'onda risultante dalle componenti *cq*, *bp*.... cioè l'onda riflessa. Posto ciò; congiungansi i punti S ed S' con *b*, e la S'*b* si prolunghi in *br*; questa rappresenterà il raggio riflesso, e la S*b* l'incidente. Essendo la *a*O una normale sollevata dal punto medio di SS', gli angoli S*b*O ed *rba*, come quelli che sono ugnali ad un terzo S'*b*O, saranno ugnali fra loro; e però ugnali saranno pure i complementi loro, cioè gli angoli di incidenza e di riflessione. Inoltre trovandosi il raggio incidente ed il riflesso nel piano S'*b*S, che contiene la normale *a*O, i detti due angoli giaceranno nel piano stesso.

Fig. 204.

2° Relativamente poi alla rifrazione, è chiaro che se il

sistema di onde, che produconsi nel secondo mezzo, procedesse con minor velocità, l'onda parziale prodotta da *b* giungerebbe in *e*, e non in *p*, quando l'incidente toccherebbe *a*. Per lo che l'onda risultante *a*N riuscirebbe meno curva dell' incidente; ossia apparterrebbe ad una sfera, il cui centro si ritroverebbe più lontano di S da *a*O: e però il suo raggio rispetto a *b* sarebbe *b*R. Il che equivale a dire che la luce subirebbe la rifrazione. Siccome poi l' andamento di questo raggio dipenderebbe dalla posizione del nuovo centro delle onde e questo senza uscire dal piano d' incidenza avrebbe una distanza, da S, determinata dalla relazione delle due velocità delle onde nel primo e nel secondo mezzo; così riesce manifesto che per due medesimi mezzi l'indice di rifrazione deve rimanere costante; ed il raggio rifratto non deve deviare dal piano d' incidenza.

Fig. 205.

3° Le stesse cose possono dimostrarsi nel seguente modo. Sia *sabs'* (fig. 205.) un fascio incidente di sezione infinitesima, e *cb* la superficie dell' onda piana o normale al fascio, nell'atto che questa incontra in *b* il piano dirimente *ab*. Il punto *b* allora diviene un centro di scotimenti, i quali propagansi parte nel primo mezzo, e parte nel secondo. Relativamente al primo genere di scotimenti, quando l'onda diretta giunge in *a*, le onde riflesse da *b*, essendo dotate della stessa velocità, saranno arrivate alla distanza $bd = ca$. Gli scotimenti generati dai punti intermedii ad *a* e *b* nel tempo stesso si saranno propagati per spazii proporzionali alla loro distanza da *a*: di modo che un piano *ad*, che riesce tangente alla sfera di raggio *bd*, sarà ancora tangente alle superficie delle onde, che sono prodotte da tutti quei punti, e costituiscono la superficie dell'onda riflessa. E però condotte le perpendicolari *ar*, *br'* a queste superficie, il raggio riflesso sarà *rabr'*. Or bene: i triangoli rettangoli *abc*, *bad* sono u-

guali; quindi i raggi incidenti ed i riflessi sono ugualmente inclinati sul piano dirimente, come esige la prima legge di Catottrica. La seconda legge poi risulta dalla simmetria della figura in riguardo al piano d' incidenza. Relativamente al secondo genere di scotimenti, sia *bd* (fig.206.) la distanza, a cui giunge con minore velocità lo scotimento nel secondo mezzo, quando la superficie *cb* arriva in *a*. Per la proporzionalità sopraddetta si potrà condurre da *a* un piano tangente *ad*, che rappresenterà la superficie dell'onda rifratta; alla quale sarà normale il fascio rifratto *arr'b*. Ebbene chiamiamo *i* l'angolo d'incidenza uguale a *cba*, ed *r* quello di rifrazione uguale a *bad*; avremo $ac = ab.\mathrm{sen}.i$, e $bd = ab.\mathrm{sen}.r$, e quindi $\mathrm{sen}.i : \mathrm{sen}.r = ac : bd$. Ora $ac : bd :: v : v'$. È dunque vera la prima legge di Diottrica. La seconda poi è manifesta dalla simmetria della figura.

II. COROLLARI. 1° Dunque l'indice di rifrazione rappresenta il rapporto delle velocità di propagazione nei due mezzi. 2° Dunque nei mezzi più rifrangenti la detta velocità è minore. Dacchè non è che per la velocità, che il raggio s'appressa alla normale [1].

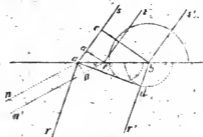



Fig. 206.

78. Interferenze.— A quanto è già stato detto su questo argomento basterà aggiungere poche dilucidazioni; le quali serviranno poi a spiegare la diffrazione, gli anelli colorati, ed i fenomeni cromatici di polarizzazione; mentre tutti questi fatti, secondo l' ipotesi delle ondulazioni, non sono che diversi effetti della legge delle interferenze.

I. SCOLII. 1° Nel sistema delle vibrazioni ogni onda à due movimenti alternativi; uno in avanti, e l'altro in dietro. E

[1] Questo corollario, opposto a ciò che viene stabilito dai sostenitori dell'emissione, è stato dimostrato sperimentalmente da Foucault. Un fa-

però se due onde della stessa lunghezza si raggiungano, può avvenire che i loro movimenti sieno concordi o discordi. Nel primo caso ne conseguirà un rinforzamento nelle vibrazioni dell'etere, e quindi una frangia chiara; nel secondo i due moti si elideranno a vicenda in tutto o in parte, e quindi o luce più debole o oscurità. Or bene: se due movimenti derivati dal medesimo centro di vibrazione s'incontreranno in un punto, dopo avere eseguito il medesimo numero di ondulazioni, essi saranno concordi. E lo saranno

scetto di luce solare entra in una camera oscura per un foro quadrato; incontra un filo di platino o (fig.207.) che vi è teso appresso; trapassa una lente acromatica L, distante dal detto filo meno del doppio della sua lunga distanza focale principale; imbatte sù di uno specchietto piano S, che gira con una grande velocità; ed ivi riflesso va a formare nello spazio un'immagine del filo metallico, la quale si sposta con una velocità angolare doppia di quella dello specchietto. Ma poichè questa immagine è riflessa da uno specchio H concavo e fisso, il cui centro di curvatura coincide coll'asse di rotazione dello specchietto girante S e col suo centro di figura; così il fascetto ritorna sui suoi passi; è riflesso di nuovo dallo specchietto; torna a traversare la lente; e corre a formare l'imagine sullo stesso filo di platino. Ma prima incontra in *a* una lastra V obliqua a facce piane e parallele ; quivi di nuovo si riflette e viene a formare in *d*, ad una distanza *ad* uguale ad *ao*, l'imagine del filo di platino, che è riguardata per mezzo di un potente oculare P. Finchè lo specchietto gira non tanto lesto, il raggio nel ritornarvi sopra da H lo ritrova nella posizione stessa; e l'imagine *o* ad ogni rivoluzione dello specchietto riapparisce nel sito stesso, oppure per la persistenza delle imagini sembra ferma al medesimo posto. Ma se lo specchio gira assai rapidamente; il raggio, dopo aver percorso gli spazii SH ed HS, trova lo specchietto in un' altra posizione, e nel riflettervisi la seconda volta prende la strada *Sb*. e va a produrre l'imagine *i*; con che questessa devia della quantità *di*.

Nell'esperienza di Foucault HS era uguale a 4 metri; e dando allo specchietto S una velocità di 600 od 800 giri a secondo si otteneva una deviazione di 2 o 3 decimi di millimetro. Dalla quale è facile dedurre la velocità della luce.

Affine di valutare la velocità della luce nell'acqua, fra lo specchio girante S, e l'altro K concavo come sopra si frappone un tubo lungo 3 metri, pieno d'acqua distillata. In questo caso il raggio, dopo aver trapassato due volte l'acqua, va a riflettersi in *c*, e produrre l'imagine in *h*; vale a dire è deviato di più che nell'aria. Il che mostra che in quest'ultimo caso è dotato di minore velocità.

È bene sapere che la velocità dello specchietto si valuta dal suono: dacchè essa è impressa da una piccola turbina a vapore, simile alla sirena.

ancora se uno à fatto più dell'altro 1, 2, 3, 4,... ondulazioni, o ciò che è lo stesso 2, 4, 6, 8,... semiondulazioni. Ma se uno avrà fatto un numero pari di semiondulazioni, e l'altro ne avrà fatte 1, 3, 5, 7,... saranno discordi.

2° Secondo il sistema dinamico la luce bianca non è che l'effetto di ogni maniera di vibrazioni; ma i raggi di diverso colore si distinguono fra loro per la sola diversità di lunghezza delle vibrazioni. Il raggio rosso risulta dalle vibrazioni più lunghe e meno rapide, le quali da calcoli istituiti sopra i risultati delle più accurate sperienze sono lunghe tra

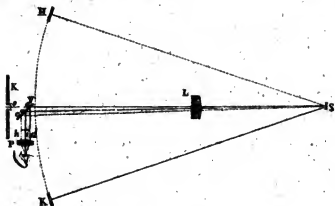



Fig. 207.

i 6 ed i 7 diecimillesimi di millimetro. Il violetto è prodotto dalle oscillazioni più rapide, le quali non sono più lunghe di 4. Ne segue che i raggi di certi colori soffrono interferenza, mentre quelli di colore diverso non l'anno, e nei medesimi punti d'interferenza alcuni raggi sono concordi ed altri discordi nei movimenti loro. Per lo che con luce omogenea le frange sono chiare e scure, per la luce bianca sono variamente colorate.

3° Fresnel giunse a determinare l'intensità o celerità delle vibrazioni risultanti dal concorso di un numero qualunque di onde luminose della medesima lunghezza, e direzione, note le loro intensità e posizioni relative. Egli dimostrò che

l'onda, risultanto dal concorso di due altre di qualsivoglia posizione, corrisponde per l'intensità e situazione alla risultante di due forze uguali alle intensità a ed a' dei fascetti lucidi, che fanno tra loro un angolo, il quale stia a tutta la circonferenza 2π, come l'intervallo c, che separa i due sistemi, sta alla lunghezza λ d' una ondulazione. Mentre per l'intensità risultante A à provato la formula

$$A = \pm\sqrt{(a^2 + a'^2 + 2aa' . \cos.[2\pi . \frac{c}{\lambda}])}.$$

II. COROLLARII. 1° Dunque l' intensità risultante di due sistemi d'onde è uguale alla somma $a + a'$ dei due fascetti componenti, nel caso di perfetto accordo. Risulta dall'introdurre nella formula quest'ultima condizione.

2° Dunque quando vi è un pieno disaccordo, la detta intensità è uguale alla differenza $a - a'$.

3° Dunque allorchè i due sistemi di onde distano fra loro di un quarto d'ondulazione, la intensità risultante è uguale alla radice quadra della somma dei quadrati $a^2 + a'^2$.

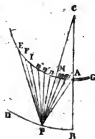
79. Diffrazione, e limiti dei raggi riflessi e rifratti.

I. SCOLII. 1° Supponiamo che C (fig. 208.) sia il punto raggiante, AG un corpo opaco, ed AME l'onda luminosa, che imbatte sull'orlo A. Dividasi quest'onda in un numero infinito di archetti Am', $m'm$, mM, Mn', $n'n''$..., da ciascuno dei quali si partono tante onde elementari in tutte le direzioni, avendo l'onda primitiva perduto il suo equilibrio trasversale per l'incontro dell'opaco. Per riconoscere l'intensità di luce in un certo punto P, sono da eliminarsi i raggi EP, FP, IP, assai inclinati sulla normale; gli effetti dei quali si elidono a vicenda. Infatti prendansi gli archi EF ed FI di tale estensione, che $EP - FP = FP - IP = \lambda : 2$; ove λ rappresenta la lunghezza dell'onda. Essi archi saranno quasi uguali, e i raggi da essi inviati in P riusciranno sensibilmente paralleli, e mutuamente si distruggeranno. Restano dunque solamente i raggi che deviano pochissimo dalla normale; i quali perciò andranno quasi nella direzione medesima, ed avranno la stessa intensità. Quindi il problema si riduce a definire la intensità, che à in P la luce risultante dal con-

corso di tutti i raggi elementari poco inclinati alla normale, che partono da diversi punti dell'onda primitiva AME, e procedono paralleli. Al che si riesce colla formula di Fresnel. Questi è riuscito a trarre dal calcolo tutti i fenomeni, che si osservano di fatto nella diffrazione.

2° Volendo prescindere dal calcolo nel trattare della diffrazione, ci contenteremo di poche osservazioni. I movimenti che nascono in ogni direzione sugli orli del corpo opaco formano dei nuovi raggi più o meno lontani dai primitivi. Perciò la luce s'inflette, allarga le ombre, e penetra nell'ombra medesima. La frangia che si osserva nel mezzo dell'ombra di un capello è la più lucida; perchè i raggi, che ivi pervengono ànno percorso spazii uguali. A destra e a sinistra succedono due frange scure: dacchè i raggi, che ivi giungono da ambidue i lati del capello, avendo percorso spazii disuguali sono in perfetto disaccordo. Se la luce incidente è bianca, siccome i raggi di colore diverso ànno diverse lunghezze di ondulazione, perciò i colori non si trovano più in ciascun punto nella proporzione da formare la luce bianca. I colori poi delle frange sono più vivaci al centro: per la ragione che nel crescere della distanza dal centro, le frange scure di certi colori rispondono alle brillanti di altri, e si sovrappongono; finchè mescolandosi interamente si giunge ad un bianco uniforme. Finalmente siccome a tal mescolanza si giunge prima colla luce bianca, che con luci meno composte; così è che il numero delle frange cresce tanto più quanto meno è composta la luce incidente.

Fig. 208.

3° Il principio delle interferenze serve pure a spiegare perchè i raggi riflesso e rifratto sieno limitati, ad onta che ogni punto della superficie, su cui imbatte la luce, divenga un nuovo centro di onde. Infatti un raggio riflesso, per esempio *en* (fig. 205.), il quale non obbedisse alla legge della riflessione, avrebbe sempre vicino un altro raggio riflesso nella direzione stessa, esempigrazia *en'*, che lo distruggerebbe.

Per restarne convinti si conducano le $e\alpha$, ed $a\beta$ perpendicolari ad *sa* ed *an*: uno scotimento luminoso del raggio *sa*, arrivando ad *ab*, avrà percorso lo spazio αa di più, che lo scotimento del raggio *te*; ma questo avrà percorso lo spazio maggiore del primo di tutta la *et*, quando ambidue giungeranno alla superficie $a\beta$ dell'onda riflessa. La differenza di cammino dei due scotimenti al giungere a tal superficie sarà uguale ad $e\beta - a\alpha$. Se tal differenza sarà uguale a $\frac{1}{2}\lambda$ preso un numero dispari di volte, i due raggi si neutralizzeranno. Ora si potrà sempre trovare una distanza *ae* capace di far verificare tal condizione. Si dica altrettanto di ogni raggio rifratto *an* (fig. 206.), il quale si esima dalla legge cartesiana.

II. COROLLARII. 1° Dunque la legge di Catottrica è vera perchè fra tutti i movimenti vibratorii, che partono dai punti d'incidenza, quei soli restano efficaci, i quali obbediscono a tal legge.

2° Dunque non è vero che tutti i raggi elementari passando da un mezzo ad un altro prendano la direzione voluta dalla legge di Diottrica; ma quei soli raggi sussistono, i quali conservano il rapporto espresso da quella legge, e tutti gli altri si estinguono.

80. Colori, e loro effetti chimici; birifrazione.

I. DEFINIZIONE. Dicesi *policroismo* il fenomeno che offrono certi corpi diafani, di mostrare un colore diverso secondo la spessezza loro.

II. SCOLII. 1° Poichè la rifrazione dipende dal cangiamento di velocità, cui soffre la luce nel passare da un mezzo ad un altro, per ispiegare la dispersione bisognerebbe ammettere che tal cangiamento fosse diverso per i differenti colori; vale a dire che le onde di differenti lunghezze si propagassero nei mezzi rifrangenti con velocità diverse. Eppure, secondo le leggi dinamiche, il moto si propaga in un mezzo elastico omogeneo con velocità costante ed uniforme in tutte le direzioni. Ecco la più formidabile obbiezione contro la teorica delle onde. Ma conviene avvertire che quest'ultima legge si avvera *nel vuoto*, e non per l'etere imprigionato fra le molecule dei corpi. In fatti Mossotti nel 1841 dimostrò col calcolo che per causa delle rapide alternazioni di maggiore o minore densità, che

l'interposizione delle molecule, e delle loro atmosfere introduce nelle parti successive di un rifrangente, le ondulazioni più corte sono ritardate di più, e meno lo sono le più lunghe; ed espose la legge di questo ritardo.

2° È manifesto che la presenza delle molecule ponderabili impedisce le vibrazioni dell'etere, e ne diminuisce l'ampiezza; quindi l'indebolimento della luce dipendentemente dalla spessezza e dalla natura dei mezzi. I corpi densissimi, come i metalli, elidono completamente le ondulazioni, quando non sono estremamente fini: e l'analisi dimostra, che in uno stesso mezzo certe ondulazioni potranno essere annichilate più facilmente delle altre, a seconda della lunghezza loro, e della disposizione delle molecule del mezzo. Donde si trae la spiegazione della opacità e del policroismo

3° Ecco come Fresnel dà ragione del colore dei corpi opachi. Se noi consideriamo due raggi incidenti vicini, uno dei quali *sn* (fig. 209.) tocchi il vertice di un' asprezza, e l'altro *s'n'* un punto di una delle cavità adiacenti; e tali che le normali in *n* ed *n'* sieno parallele fra loro, o ciò che è lo stesso, perpendicolari ad una terza *ab*; i raggi riflessi *nr*, *n'r'* saranno parimente paralleli, ed il raggio *s'n'* sarà dopo la riflessione in ritardo sul raggio *sn* di tutta la quantità *an'b*. Ora se la profondità *e* della cavità, contata parallelamente alle normali, è tale che il ritardo sia uguale ad una semiondulazione dei raggi violetti, questi saranno distrutti per interferenza; e la luce riflessa sarà colorata.

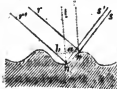



Fig. 209.

4° Si capisce facilmente che l'agitazione prodotta nell'etere, che inviluppa le molecule, o in questesse, in forza delle vibrazioni dei raggi incidenti deve provocare l'associazione o la separazione delle molecule di specie differente, e determinare delle combinazioni e delle decomposizioni chimiche. Si vede ancora che le molecule agitate possono essere condotte a prender posizioni regolari, perchè più libere ad obbedire alle forze predominanti: come avviene nell' acqua raffreddata sotto zero, cui le scosse determinano a gelare; e

nelle particelle di ferro, che formano lo spettro magnetico per gli scotimenti della carta, su cui sono sparse. Certo alcuni raggi colorati ànno un'attività chimica differente secondo le diverse sostanze: perchè certe molecule debbono rispondere più facilmente a talune vibrazioni; in quella guisa che solo certe corde di un'arpa rispondono ai suoni prodotti in lor vicinanza. E questa dev' essere la ragione, onde certi cloruri, che dànno alla fiamma d'acquarzente tale o tale altro colore: cioè producono nell'etere, durante la combustione, delle vibrazioni di una certa lunghezza, dànno eziandio agli strati sensibili della fotografia la facoltà di riflettere o diffondere più facilmente il raggio dello stesso colore, quando essi ne sieno stati colpiti per un certo tempo.

5° La birifrazione si spiega supponendo che l'etere nelle diverse direzioni dei cristalli birifrangenti abbia diversa densità; la quale deve provenire dalla disposizione delle molecule loro, più ravvicinate in certe direzioni che in altre. Cosa d'altronde attestata dalla differente nettezza degli sfaldamenti; dai cangiamenti di elasticità, di dilatabilità, e di conducibilità secondo le direzioni; e dalla polarità diamagnetica.

81. Polarizzazione nel sistema delle vibrazioni.

I. DEFINIZIONE. Si chiama *piano del raggio* quello, in cui si eseguiscono per la maggior parte le ondulazioni della luce polarizzata, ed il quale riesce perpendicolare al piano di polarizzazione.

II. SCOLII. 1° Le leggi stabilite nella Sezione Seconda della Parte Sperimentale (**38**.I.) sulle interferenze dei raggi polarizzati provano che le vibrazioni dell'etere sono trasversali al raggio. Che poi il piano del raggio sia perpendicolare a quello di polarizzazione risulta da molte considerazioni. Esponiamone una. È certo che il raggio ordinario, all'uscire da un cristallo birifrangente, è polarizzato nella sezione principale. Ebbene; poichè questo raggio à una velocità costante in tutte le direzioni, o in altri termini segue la legge cartesiana, le vibrazioni dell'etere debbono avervi una direzione costante rapporto all'asse del cristallo. Ora esse sono perpendicolari al raggio, qualunque angolo questo faccia coll'asse; col quale certamente non possono fare un angolo costante se non

nel caso che riescano ad esso perpendicolari. Dunque le vibrazioni sono normali ad un tempo al raggio ed all'asse; per conseguenza alla sezione principale, che in tal caso confondesi col piano di polarizzazione. Ma tutti i raggi polarizzati, qualunque ne sia stata la causa polarizzatrice, godono delle stesse proprietà. Dunque in tutti le vibrazioni sono normali al piano di polarizzazione.

2° Quanto alla polarizzazione cromatica si noti che un fascio polarizzato, il quale trapassa normalmente una lastra cristallizzata, si decompone in due altri, ordinariamente di diversa intensità; i quali, separandosi insensibilmente per la sottigliezza della lastra, può dirsi che percorrano la stessa via. Questi fasci posseggono delle velocità differenti di modo, che al loro uscire le ondulazioni non sono più concordi: ciò non ostante essi non possono interferire, giacchè sono polarizzati ad angolo retto. Ma se per mezzo di un polariscopio sieno riportati al medesimo piano di polarizzazione, potranno bene interferire; ed il fascio emergente avrà una intensità dipendente dalla differenza di cammino dei due raggi nel punto di emergenza.

3° Quando un fascetto visto a traverso un analizzatore offre la stessa intensità in tutti gli azzimutti, come la luce comune, ma all'incontrario di questa col frapporre una lastra cristallizzata si colora diversamente da quello, che avverrebbe in un raggio polarizzato in un piano; esso è certamente polarizzato circolarmente. Quando poi un fascio presenta nelle sue intensità dei massimi e dei minimi in due posizioni rettangolari, come la luce parzialmente polarizzata in un piano; e nel medesimo tempo, per l'interposizione di una lastra cristallizzata, si colora con tinte differenti da quelle, che sarebber date da un raggio polarizzato particolarmente in un piano; esso à la polarizzazione ellittica. Di queste due polarizzazioni basti la spiegazione accennata nella Sezione Seconda della Parte Sperimentale (**ss.** II. 2°).

4° Tutti questi dottrinali sull'Ottica potranno a taluno meno esperto nella storia della Fisica, sembrare sovrabbondanti ed eccessivi; eppure non sono che assai monchi ed imperfetti. Tutto questo Capo non contiene che un *epilogo* delle sole

teoriche fondamentali nei due sistemi ottici. Gli sviluppi di tali teoriche, e le loro applicazioni a tutte le classi dei fenomeni della luce sono una mole oramai spaventevole. Quando l'uomo ebbro di gioia per le sue scoperte gongola d'allegrezza, e sta già per lasciarsi sedurre dalla compiacenza e dall'orgoglio, gli si para dinanzi un così vasto campo di ricerche anche più scabrose ed importanti, che se à occhio per abbracciarne l'estensione e mente per valutarne la rilevanza, si sente fiaccare l'insolente alterigia, ed è costretto a riconoscere la sua estrema pochezza a fronte della grandezza incomprensibile del Facitore dell'Universo.

Affinchè i quattro Tomi, nei quali è divisa l'Opera, riuscissero meno sproporzionati in volume di quello che tendevano a divenire per le molte aggiunte fatte alle materie contenute nella prima edizione, si sono dovute spostare la Geologia, la Storia Naturale, la Geografia matematica, e l'Astronomia fisica. Questi due ultimi trattati doveano costituire la Sezione Terza del Tomo IV; ed invece ritrovansi nel Tomo I: ove la Geografia matematica forma il soggetto dell'Articolo I del Capo II nella Seconda Sezione, e l'Astronomia fisica è sparsa qua e là nel Capo II della Sezione Prima. La Storia Naturale poi e la Geologia, che avrebbero dovuto essere il tema della Terza Sezione del Tomo I, sono in questesso esposte nell'ultimo Articolo della Sezione Seconda.

APPENDICE.

---

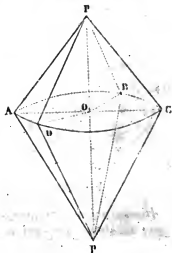
82. Tema della presente Appendice. — I lemmi di Geometria solida, che non rinvengonsi nei Corsi elementari di Matematica, e nulladimeno vengono invocati in codesti Elementi, si riducono ad otto teoremi, e ad alcuni pochi corollarii che facilmente da taluni di essi possono inferirsi. E ciò è appunto che forma il suggetto della presente Appendice.

83. Teorema primo.— È da mandare innanzi una

I. DEFINIZIONE. Gli estremi di una retta centrale e normale ad un circolo chiamansi *poli* del medesimo circolo.

II. TEOREMA. *Ciascun punto della circonferenza di un circolo equidista dallo stesso suo polo; e viceversa, un punto preso fuori di un circolo, se equidista da tutti i punti della circonferenza di questo, ne è polo.*

Fig. 210.

Dimostrazione della 1ª *parte.* Ove ciascun punto della circonferenza per esempio A, B, C, D,... (fig.210.) si unisca al suo polo P, per mezzo delle rette AP, BP, CP,..., ed al centro O, per mezzo delle AO, BO, CO,.. , ne nascono tanti triangoli uguali AOP, BOP, COP,.... Infatti, essendo la PP per definizione centrale e normale al circolo, i detti triangoli sono rettangoli in O ed ànno uguali tutti i cateti AO, BO, CO,...; e di più la PO è comune. Ne consèguita

(Euclide lib. I. prop. IV.) che tutte le ipotenuse AP, BP, CP,... debbono essere uguali.

Dimostrazione della 2ª parte. Il centro O del circolo si congiunga con P e poi coi singoli punti della circonferenza per le rette AO, BO, CO,.... Queste ultime sono uguali perchè raggi, la OP è comune, e le AP, BP, CP,... sono uguali per ipotesi. Dunque (Euclide lib. I. prop. VIII.) tutti i triangoli ABP, BOP, COP,... sono uguali. Sono dunque uguali tutti gli angoli intorno al piede della OP, ossia AOP, BOP, COP,.... Ma la uguaglianza di AOP a COP, posto che CO sia prolungazione di AO, porta con sè (Euclide libro I. prop. XIII.) che quei due angoli sieno retti. Dunque tutti gli angoli AOP, BOP, COP,... sono retti; e la OP (Euclide lib. XI. defin. III.) è normale al circolo. Ma è anche centrale per costruzione Dunque il suo estremo P è polo del circolo ABC....

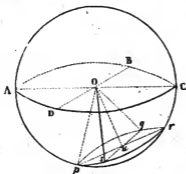



Fig. 211.

84. Teorema secondo. — Ora è facile dimostrare il

I. TEOREMA. *Qualunque sezione di una sfera è un circolo.*

Dimostrazione. Si possono fare due casi. O il piano secante la sfera passa pel centro, o no. Se vi passa, venga rappresentato da ABC... (fig.**211**.); ed ai punti A, B, C,.., presi a piacere sulla curva nata dalla sezione, si conducano sul detto piano dal centro O le rette AO, BO, CO,.... Poichè queste sono raggi della sfera, debbono essere tutte uguali. Dunque i punti della curva, alla quale esse pervengono, equidistano tutti da un certo punto O collocato nel piano stesso; cioè (Euclide lib I. defin. XV.) questa curva è un circolo. Se poi la sezione non passa pel centro della sfera, potrà essere rappresentata da *pqrs* (fig.**211**.). Ebbene dal centro O della sfera si abbassi la perpendicolare O*u*

su questa sezione (Euclide lib. XI. prop. XI.); e poscia presi a piacere i punti $p, q, r, \ldots$ sulla curva, in cui termina la sezione, questi congiungansi col centro O, e col piede u della normale. Ne otterremo i triangoli Opu, Oqu, $Oru, \ldots$ i quali riusciranno uguali: perchè sono rettangoli in u per costruzione, ànno un cateto Ou comune ed ànno ancora uguali tutte le ipotenuse come raggi della stessa sfera. Dunque anche le pu, qu, $ru, \ldots$ sono uguali. E per conseguenza la curva $pqrs\ldots$ soddisfa alla definizione del circolo.

II. COROLLARII. 1° *Dunque le sezioni di una sfera sono circoli tanto più piccoli, quanto esse sezioni passano più distanti dal centro della sfera.* Dappoichè nei triangoli rettangoli Opu, Oqu, $Oru, \ldots$ coll'allontanare la sezione da O, si ingrandisce Ou, ma restano costanti le Op, Oq, $Or, \ldots$: perchè sono sempre raggi della sfera stessa. Ma in un triangolo rettangolo non può allungarsi un cateto, e restar costante l'ipotenusa, senza che si abbrevii l'altro cateto; e ciò affinchè la diminuzione del quadrato di questo compensi l'aumento del quadrato dell'altro, e così la somma dei due quadrati (Euclide lib. I. propos. XLVII.) rimanga costante come l'ipotenusa. Dunque i raggi up, uq, $ur, \ldots$ diminuiscono tanto più, quanto la sezione dista maggiormente dal centro della sfera.

2° *Dunque i circoli, che passano pel centro della sfera sono i più grandi di ogni altro, e tutti uguali fra loro.* Dacchè i circoli sono tanto più grandi, quanto più vicino al centro della sfera passano i piani loro (1°).

3° *Dunque il centro di una sfera è il centro stesso del circolo che passa per esso.* Dappoichè i raggi di questo circolo, dovendo essere i più grandi di ogni altro, saranno i raggi stessi della sfera.

85. Teorema terzo. — Premettiamo due definizioni.

I. DEFINIZIONI. 1ª Ogni sezione di una sfera, il cui piano passa pel centro di questa, è detta *circolo massimo*.

2ª Dicesi *circolo minore* quella sezione di sfera, il piano della quale passa fuori del centro della sfera stessa.

II. TEOREMA. *Il centro della sfera e quello di un suo circolo minore sono sopra una retta, che insiste perpendicolarmente sul piano del circolo minore medesimo.*

Dimostrazione. Congiunto il centro *u* del circolo minore col centro O della sfera, ed anche con quanti si vogliano punti della circonferenza, esempigrazia *p*, *q*, *r*,.... e condotte da questi le O*p*, O*q*, O*r*,.... questesse sono tutte uguali come raggi della sfera medesima. Inoltre le *pu*, *qu*, *ru*,... come raggi di uno stesso circolo, sono uguali fra loro; e la O*u* è comune. Dunque le O*p*, O*q*, O*r*,... sono uguali. Ma questo importa che gli angoli adiacenti O*up*, O*ur*, ed O*uq*, O*us* sieno uguali, e però retti. Dunque la O*u* è perpendicolare sul circolo minore.

88. Teorema quarto. — Ora stabiliamo il seguente

TEOREMA. *Se i circoli di una sfera si tagliano a vicenda per metà, sono massimi; e viceversa, se sono massimi, si tagliano mutuamente a metà.*

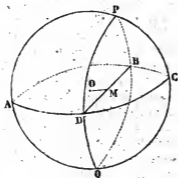



Fig. 212.

Dimostrazione della parte 1ª. È evidente che la linea di intersezione di due circoli, a cagion d' esempio ABCD; PBQD (fig. 212.), che si tagliano scambievolmente in parti uguali, è diametro di ambedue. Ora questo *diametro* è quello stesso della sfera. Infatti facciamo che non lo sia. Si congiunga, per la OM, il centro O della sfera col punto medio M di questo diametro; ossia col centro comune dei due circoli. La retta OM congiungente sarà (85.II.) perpendicolare ad ambidue. Ma due piani, ai quali è perpendicolare una stessa retta, sono (Euclide lib. XI. prop. XIV.) paralleli fra loro. Dunque questi due circoli e si tagliano a metà e sono paralleli. Il che essendo assurdo, è assurdo ancora che il diametro comune sia diverso da quello della sfera. Ma se è quello stesso della sfera; i due circoli passano pel centro di questa, e sono massimi.

Dimostrazione della 2ª parte. I circoli massimi passano (**85**.I.1°) pel centro della sfera; anzi (**84**. II. 3°) ànno per centro il centro stesso della sfera. Dunque due circoli massimi si intersecano fra loro al centro della sfera, che è il centro loro comune. Dunque la retta di intersezione è un loro diametro comune. E però si dividono vicendevolmente a metà.

87. Teorema quinto. — Breve è la dimostrazione del TEOREMA. *Se un circolo massimo passa per i poli di un circolo o massimo o minore, divide questo per metà e ad angoli retti.*

Dimostrazione. Il circolo massimo, che passa per i poli di un circolo, passa anche per la retta, che congiunge questi poli; ma tal retta per definizione è centrale e normale al circolo. Dunque anche il circolo massimo è centrale e normale all'altro circolo o massimo o minore, pei poli del quale passa: ossia lo divide a metà e ad angoli retti.

88. Teorema sesto. — Presto pur si dimostra il TEOREMA. *Se un circolo massimo non passa per i poli di un circolo minore, divide questo in parti disuguali.*

Dimostrazione. Se il circolo massimo, che non passa per i poli di un circolo minore, dividesse questo in parti uguali, passerebbe pel centro del circolo minore; e perciò in esso circolo massimo ritroverebbesi tanto il centro della sfera, quanto quello del circolo minore. Ma anche la retta, che congiunge i poli del minore, passa per li medesimi due centri; quindi due punti di questa retta si troverebbero nel circolo massimo: e perciò non solo quella, ma anche questo passerebbe, contro l'ipotesi, pei poli del circolo minore.

89. Teorema settimo. — Dimostriamo ora il TEOREMA. *Se un circolo massimo non passa pel centro di un circolo minore, lo divide in parti disuguali; e tanto più disuguali, quanto il massimo passa più lontano da detto centro.*

Dimostrazione della 1ª parte. Se un circolo massimo non passa pel centro di un circolo minore, e ciò non ostante lo taglia, l'intersezione dovrà essere una corda e non un diametro del minore. Dunque ecc.

Dimostrazione della 2ª parte. La sopraddetta corda, intersezione del circolo massimo col minore, è senza dubbio tanto più piccola, quanto il massimo passa più lontano dal centro del minore. Ma quanto la corda di un circolo è più piccola, tanto sono più disuguali le due porzioni, nelle quali è divisa da essa corda la circonferenza. Dunque ecc.

90. Teorema ottavo. — Finalmente proveremo il

I. TEOREMA. *Un circolo massimo, che non passa per i poli di un circolo minore, divide questo in parti tanto più disuguali, quanto il massimo passa più lontano dai poli del minore medesimo.*

Dimostrazione. Le parti, nelle quali un circolo minore è tagliato da un massimo, sono tanto più disuguali fra loro, quanto il massimo passa più distante dal centro (**89.**) del circolo minore. Ma quanto il massimo passa a maggior distanza dai poli del minore, e tanto anche passa più distante dal centro del minore medesimo. Dappoichè quanto più il circolo massimo si allontana dai poli del minore, tanto maggior angolo fa, al centro della sfera, colla retta congiungente i poli e passante pel centro del minore; e però esso circolo massimo passa anche tauto più lontano dal centro del minore.

II. COROLLARII. 1° *Dunque un circolo massimo non divide in parti uguali un circolo minore, se non nel caso in cui esso stesso passi pei poli di questo.* Poichè, dal teorema quinto, se un circolo massimo passa per i poli di un minore, lo divide per metà; e, dal sesto, se non passa per i poli, lo divide in parti disuguali. Dunque non vi è altro caso, in cui il circolo massimo divida per metà il minore all'infuori di quello, in cui esso passa per i poli del minore.

2° *Dunque ogni circolo, che è tagliato a metà da un circolo massimo che non passa per i suoi poli, è massimo.* Imperocchè se non fosse massimo sarebbe minore: ma se fosse minore, sarebbe contro l'ipotesi diviso in parti disuguali, come or ora si è dimostrato: dunque sarà certamente massimo.

FINE DEL TOMO IV.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL PRESENTE VOLUME.

FISICA MATEMATICA.

SEZIONE PRIMA.

MECCANICA.

CAPO PRIMO.

EQUILIBRIO E MOTO DEI SOLIDI.

ART. II. **Stereodinamica.**

CAPO SECONDO.

EQUILIBRIO E MOTO DEI LIQUIDI.

ART. I. **Idrostatica.**

ART. II. **Idrodinamica.**

CAPO TERZO.

EQUILIBRIO E MOTO DEGLI AERIFORMI.

ART. I. **Aerostatica.**

ART. II. **Aerodinamica.**

SEZIONE SECONDA.

ACUSTICA ED OTTICA.

CAPO PRIMO.

ACUSTICA.

CAPO SECONDO.

OTTICA.

APPENDICE.

ERRATA CORRIGE.

PAGINA	LINEA	INVECE DI	LEGGI
30	2	(3.IV.5°)	(3.IV.6°)
32	14	ed ivi si	ed ai punti A e B si
35	16	distanza DI	distanza CG
35	18	$DI = \frac{r' \times KU + ty'''}{r+t}$	$CG = \frac{r' \times KU + ty'''}{r+t}$
43	34	::CN:CN	::CN:CM
43	37	::BC:CN	::BC:CM
44	22	per la diagonale BD	per la bisecante EF
44	29	di ABC, cui	di ABD, cui
45	4	col doppio della so-	colla so-
45	5	poi coll'altra	poi col doppio dell'altra
46	6	lato AB, che	suo stremo E, che
46	14	BE. Poi	BF. Poi
60	17	$q \times FN$	$r \times FN$
60	20	$p \times AM, q \times BN$	$p \times AM, r \times BN$
60	21	(p e q)	(p ed r)
98	13	*compressione*	*compressione o percussione*
115	2	$s = \frac{1}{2} v \frac{v}{2g}$	$s = \frac{1}{2} v . \frac{v}{g}$
137	21	$\sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{} : \frac{r'}{g'}$	$\sqrt{\frac{r}{g}} : \sqrt{\frac{r'}{g'}}$
142	1	la direzione delle forze	la direzione (PR) delle forze
142	2	linea orizzontale (PR)	linea orizzontale (PB)
142	10	(m'' ed n')	(m' ed n')
150	6	CM, CN, CM',	CM, CR, CM'
150	16	i raggi vettori CN	le normali CN

PAGINA	LINEA	INVECE DI	LEGGI
150	24	l'asse vettore	il raggio vettore
152	13	alla velocità	al quadrato della velocità
155	3	(35.II.)	(30.II.2°)
157	4	cioè 365 metri	cioè 465 metri
157	5	MR = 365	MR = 465
159	21	KNKN'	KNHN'
172	16	piana (MA, M'A'),	piana (MAM'A'),
175	30	le frecce A e B	le linee MA,MB
185	3	(D) del liquido	(N) del liquido
185	7	faccia superiore (A)	faccia superiore (D)
185	8	detta faccia (A)	detta faccia (D)
185	9	profondità (DA)	profondità (ND)
185	10	inferiore (B)	inferiore (C)
185	11	base (B), ma di altezza maggiore (=DB)	base (C), ma di altezza maggiore (=NC)
191	4	pesa 0,405	pesa 0,406
191	5	è 7,821 : 0,506	è 7,821 : 0,406
203	30	$v = 36,79.\surd$	$v = 26,79.\surd$
208	8	da $d = \frac{13}{16}.\, av$	da $d' = \frac{13}{16}.\, av$
208	29	orizzontale minuto	orizzontale luogo parimente 15 once (metri 0,2792). E però la portata per ogni minuto
227	18	*la* al *si* $\frac{9}{9}$,	*la* al *si* $\frac{9}{8}$,
248	3	coll'estrar l'aria,	col condensar l'aria,
248	4	invece col condensarla	invece col rarefarla
256	28	distanza ne udirà	distanza non ne udirà
256	29	ma cesserà d'ascoltarlo	ma tornerà ad ascoltarlo
266	24	onde più lunghe	onde meno lunghe
279	19	da: come avviene	da: al contrario di quello che avviene
280	33	(fig.203.)	(fig.204.),
283	26	la velocità, che	la velocità minore, che

IMPRIMATUR

FR. HIERON. GIGLI ORD. PRAED. SACR. PAL. AP. MAG.

IMPRIMATUR

PETRUS VILLANOVA-CASTELLACCI ARCHIEP. PETR. VICESG.